



DGK Veröffentlichungen der DGK
Ausschuss Geodäsie der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Reihe C

Dissertationen

Heft Nr. 797

Franz Hofmann

**Lunar Laser Ranging –
verbesserte Modellierung der Mondodynamik
und Schätzung relativistischer Parameter**

München 2017

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

ISSN 0065-5325

ISBN 978-3-7696-5209 3

Diese Arbeit ist gleichzeitig veröffentlicht in:
Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Geodäsie und Geoinformatik der Leibniz Universität Hannover
ISSN 0174-1454, Nr. 331, Hannover 2017



DGK Veröffentlichungen der DGK

Ausschuss Geodäsie der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Reihe C

Dissertationen

Heft Nr. 797

Lunar Laser Ranging –
verbesserte Modellierung der Mondodynamik
und Schätzung relativistischer Parameter

Von der Fakultät für Bauingenieurwesen und Geodäsie
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover
zur Erlangung des Grades
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Ing. Franz Hofmann

geboren am 04. Juni 1982 in Annaberg-Buchholz

München 2017

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

ISSN 0065-5325

ISBN 978-3-7696-5209 3

Diese Arbeit ist gleichzeitig veröffentlicht in:
Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Geodäsie und Geoinformatik der Leibniz Universität Hannover
ISSN 0174-1454, Nr. 331, Hannover 2017

Adresse der DGK:



Ausschuss Geodäsie der Bayerischen Akademie der Wissenschaften (DGK)

Alfons-Goppel-Straße 11 • D – 80 539 München

Telefon +49 – 89 – 23 031 1113 • Telefax +49 – 89 – 23 031 -1283 / - 1100

e-mail dgk-post@dgk.badw.de • <http://www.dgk.badw.de>

Prüfungskommission:

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Jakob Flury

Referent: Prof. Dr.-Ing. habil. Jürgen Müller

Korreferenten: Prof. Dr. phil. nat. habil. Michael Soffel (TU Dresden)

Prof. Dr.-Ing. habil. Christian Heipke

Tag der mündlichen Prüfung: 09.02.2017

© 2017 Bayerische Akademie der Wissenschaften, München

Alle Rechte vorbehalten. Ohne Genehmigung der Herausgeber ist es auch nicht gestattet,
die Veröffentlichung oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen

Kurzfassung

Laserentfernungsmessungen zum Mond, Lunar Laser Ranging (LLR), werden seit 1969 genutzt, um verschiedene physikalische Parameter des Erde-Mond-Systems mit hoher Genauigkeit zu bestimmen. Darüber hinaus bietet LLR die Möglichkeit, verschiedene Größen zum Test von Gravitationstheorien zu untersuchen. Die Messgenauigkeit der modernsten Observatorien erreicht seit etwa 10 Jahren die Größenordnung von wenigen Millimetern. Um die hohe Genauigkeit der Messungen möglichst gut auszuschöpfen, werden die am Institut für Erdmessung genutzten Modelle zur LLR-Analyse verfeinert. Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf der Verbesserung der Modellierung der Monddynamik und den daran anschließenden Untersuchungen der Effekte auf die geschätzten Parameter, insbesondere zum Test der Einstein'schen Gravitationstheorie.

In der Ephemeridenrechnung werden die gravitativen Effekte auf den Mond erweitert, um Fehler durch eine ungenaue Modellierung zu minimieren. Untersucht werden die Effekte von Sonne und Planeten auf den Mond als ausgedehnten Körper, die gravitative Wechselwirkung des Mondes mit der Erde, säkulare Änderungen in den zonalen Potentialkoeffizienten der Erde und die Gezeitenwirkung der festen Erde auf die Mondephemeride. Das Modell der Mondrotation wird auf ein 2-Schichten-Modell mit festem Mantel und flüssigem Kern erweitert und der Effekt der Gezeiten-deformation des Mondes auf die Reflektorkoordinaten und die Ephemeride berücksichtigt. Die in dieser Arbeit als signifikant bestimmten Mondkernparameter, eine Kopplungskonstante zwischen Mantel und Kern sowie der Rotationsvektor des Kerns, stellen einen deutlichen Hinweis auf die Existenz eines flüssigen Kerns oder einer flüssigen Schale um einen inneren, festen Kern dar.

Für die Schätzung der Parameter wird ein aktualisierter Datensatz mit Messwerten bis Anfang 2015 verwendet. Die geschätzten Größen der LLR-Analyse werden bezüglich ihrer gegenseitigen Abhängigkeiten und den erreichten Genauigkeiten untersucht. Ergebnisse für Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten sowie für Nutationskoeffizienten werden mit denen auf Basis der bisher genutzten Modellierung verglichen. Die Differenz der Stationskoordinaten zur ITRF-Referenzlösung wurde in dieser Arbeit um einen Faktor 4 reduziert, die Abweichungen der Nutationskoeffizienten zum MHB2000-Modell reduzieren sich teilweise um mehrere Millibogensekunden. Die Verbesserung der Analyse der LLR-Daten zeigt sich auch in der Verringerung der Residuen nach der Ausgleichung von rund 30% im Vergleich zur bisherigen Lösung.

Die Einstein'sche Gravitationstheorie wird mit der erweiterten Modellierung anhand von Testgrößen untersucht. Im Rahmen der Auswertegenauigkeit wurden keine Abweichungen von der Einstein'schen Gravitationstheorie festgestellt. Die Genauigkeiten der geschätzten relativistischen Parameter konnten in dieser Arbeit erhöht werden. Zu den wichtigsten Ergebnissen gehören die Schätzung einer möglichen zeitlichen Variation der Gravitationskonstanten mit $\dot{G}/G_0 = (7 \pm 8) \times 10^{-14} \text{ a}^{-1}$ und einer möglichen Verletzung des Äquivalenzprinzips mit $\Delta(m_g/m_i)_{EM} = (-3 \pm 5) \times 10^{-14}$.

In einer Simulation wurde der Einfluss von weiteren LLR-Stationen und von künftigen, millimetergenauen Messungen zu neuen Einzelprisma-Reflektoren auf die geschätzten Parameter untersucht. Unter optimalen Bedingungen können zum Beispiel Verbesserungen in der Schätzung von \dot{G}/G_0 um einen Faktor 8 nach einer zusätzlichen Beobachtungszeit von 8 Jahren erreicht werden.

Schlagwörter: *Lunar Laser Ranging, Gravitationswechselwirkung, Gezeitenbeschleunigung, Mondrotation, Gravitationskonstante, Äquivalenzprinzip, PPN-Parameter, Yukawa-Effekt, Geodätische Präzession*

Summary

Lunar Laser Ranging (LLR) has been used since 1969 to determine several physical parameters of the Earth-Moon system with high accuracy. In addition, LLR provides the opportunity to estimate different parameters for testing gravitational theories. Over the past 10 years, the measurement accuracy of the state-of-the-art observatories has reached the level of a few millimeters. To take advantage of this highly accurate data, the models of the LLR analysis software which is used at the ‘Institut für Erdmessung’ have been refined. The main focus of this thesis is the improvement of the modeled lunar dynamics and subsequent studies of these effects on the estimated parameters, especially for testing Einstein’s theory of gravitation.

In the ephemeris computation, the gravitational effects on the Moon are extended in order to minimize errors from inaccurate modeling. Here, the effects of the Sun and the planets on the Moon as an extended body, the gravitational interaction of the Moon with the Earth, secular changes in the zonal potential coefficients of the Earth and the effect of the solid Earth tides are studied. The rotational model of the Moon is extended to a 2-layer model with a solid mantle and a liquid core, and the effect of lunar tidal deformation on the reflector coordinates and on the lunar ephemeris is considered. The lunar core parameters (a coupling constant between mantle and core as well as the rotation vector of the core), which are determined as significant in this thesis, are a clear indication of the existence of either a liquid core or a liquid shell around an inner solid core.

An updated data set with measurements until early 2015 is used for parameter estimation. The quality of the estimated LLR parameters is assessed considering their correlations and individual accuracies. Results for the station coordinates and velocities as well as the nutation coefficients are compared with values based on former analyses. The difference between the ITRF reference solution and the station coordinates can be reduced by a factor of four. Additionally, the deviations of the estimated nutation coefficients to the MHB2000 model are partly reduced by several milli-arcseconds. The improvement of the LLR analysis is also reflected by the reduction of the post-fit residuals of about 30 % compared to the previous solution.

Using various test parameters, the validity of Einstein’s theory of gravitation has been studied with our extended model. Within the achieved accuracy of our LLR analysis, no deviations from Einstein’s theory are detected. The accuracies of the estimated relativistic parameters could be improved in this thesis. The most important results include the estimation of a possible temporal variation of the gravitational constant with $\dot{G}/G_0 = (7 \pm 8) \times 10^{-14} \text{ a}^{-1}$ and a possible violation of the equivalence principle with $\Delta(m_g/m_i)_{EM} = (-3 \pm 5) \times 10^{-14}$.

The effect of additional LLR stations and of future measurements to new single cube-corner reflectors with millimeter accuracy is investigated by simulations. For example, the accuracy of \dot{G}/G_0 can be improved by a factor of 8 after an observation period of 8 years and under optimal conditions.

Keywords: Lunar Laser Ranging, gravitational interaction, tidal acceleration, lunar rotation, gravitational constant, equivalence principle, PPN parameters, Yukawa effect, geodetic precession

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	9
Tabellenverzeichnis	11
1 Einleitung	13
2 LLR-Grundlagen	15
2.1 Messprozess LLR	15
2.2 Analyse der LLR-Messungen mit LUNAR	17
2.2.1 Teilprogramm EPHEM - Berechnung der Ephemeriden	19
2.2.2 Berechnung der partiellen Ableitungen	21
2.2.3 Programmteil PAR - Parameterschätzung	22
3 Aktualisierung der Normalpunkte	24
4 Erweiterung der Analysesoftware LUNAR	29
4.1 Allgemeine Änderungen	29
4.1.1 Mondschwerefeld	29
4.1.2 Modell der atmosphärischen Laufzeitverzögerung	29
4.1.3 Gezeitenwirkung auf die Reflektorkoordinaten	30
4.1.4 Integrationsgenauigkeit	33
4.1.5 Planetare Wechselwirkung mit der Erdabplattung	34
4.2 Wirkung äußerer gravitativer Kräfte auf den Mond	34
4.2.1 Planetare und solare Wechselwirkung mit dem Mondschwerefeld	34
4.2.2 Wechselwirkung „ausgedehnter Körper - Punktmasse“ im Erde-Mond-System	38
4.2.3 Wechselwirkung „ausgedehnter Körper untereinander“ im Erde-Mond-System	39
4.2.4 Säkulare Variationen im zonalen Erdschwerefeld	46
4.2.5 Gezeitendeformation der Erde	48
4.3 Rotation des Mondes	55
4.4 Programmpaket zur Simulation von LLR-Messungen	59
5 Ergebnisse Newton'sche Parameter	62
5.1 Effekt der Modellierung des flüssigen Mondkerns	62
5.2 Stationsabhängige Laufzeitkorrekturen	65
5.3 Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten	65
5.4 Parameter der Erdorientierung	69
5.5 Reflektorkoordinaten als Realisierung des SRS	73
5.5.1 Koordinaten im Hauptachsen- und Mean-Earth-System	73
5.5.2 Änderungen durch Wechselwirkung der Planeten mit dem Mondschwerefeld .	76
5.6 Zeitverzögerung der Erdgezeiten	77
5.7 Lunare Potentialkoeffizienten und Masse des Erde-Mond-Systems	79
5.8 Untersuchungen der Post-fit-Residuen	80

6	Ergebnisse relativistische Parameter	86
6.1	Zeitliche Variation der Gravitationskonstanten	86
6.2	Äquivalenzprinzip	91
6.2.1	Test bezüglich der Richtung zur Sonne	91
6.2.2	Test bezüglich der Richtung zum galaktischen Zentrum	96
6.3	Abstandsabhängige Modifikation der Gravitationswirkung	98
6.4	Geodätische Präzession	100
6.5	Schätzung von PPN-Parametern	102
6.5.1	Metrikparameter γ und β	103
6.5.2	Parameter der bevorzugten Bezugssysteme, α_1 und α_2	106
7	Ergebnisse der Simulationen	109
8	Zusammenfassung und Ausblick	114
8.1	Zusammenfassung	114
8.2	Ausblick	116
A	Anhang	117
A.1	Rotationsmatrizen	117
A.2	A-priori Stationskoordinaten, -geschwindigkeiten und local ties	117
A.3	Potentialkoeffizienten des Mondschwerefeldes	119
A.4	Ergebnisübersicht der geschätzten Parameter	120
	Abkürzungsverzeichnis	123
	Literaturverzeichnis	125

Abbildungsverzeichnis

2.1	Positionen der LLR-Observatorien und -Reflektoren	15
2.2	Retroreflektor der Apollo 15-Mission	16
2.3	Laufzeitdifferenzen der LLR-Rohmessung vor Normalpunkterstellung	17
2.4	Schema der LLR-Messung im Erde-Mond-System	19
3.1	Residuen der McDonald-Station aus CDDIS-Daten bis 1975	26
3.2	Differenz der Sendezeit zwischen aufeinanderfolgenden Normalpunkten	27
3.3	Histogramm der Normalpunkte von 1970 bis 2015	28
4.1	Modellvergleich der atmosphärischen Laufzeitkorrektur	31
4.2	Effekt der zeitverzögerten lunaren Gezeiten auf die Reflektorkoordinaten	32
4.3	Effekt der Venus auf die Mondephemeride bei größter Rotationsänderung	35
4.4	Effekt der Venus auf die Mondephemeride bei größter Translationsänderung	36
4.5	Gravitationsfeldstärke der Planeten an der Position des Mondes	36
4.6	Effekt der Venus auf die Eulerwinkel des Mondes	37
4.7	Residuenänderung bei Modellierung der planetaren Störungen auf den Mond	38
4.8	Eulerwinkel zwischen zwei Referenzsystemen	40
4.9	Effekt der erweiterten Modellierung der Figurenkräfte auf den wrms	46
4.10	Schema der zeitverzögerten Erdgezeiten	52
4.11	Effekt der erweiterten Modellierung der Mondrotation auf den wrms	59
4.12	Effekt der Kernmodellierung auf den wrms	60
5.1	Vergleich der Residuen zwischen den Modellen mit und ohne Mondkern	63
5.2	Vergleich des jährlichen wrms mit der alten Programmversion	80
5.3	Residuenvergleich zwischen Reflektoren mit ähnlicher selenozentrischer Länge	81
5.4	Residuenvergleich zwischen Reflektoren mit ähnlicher selenozentrischer Breite	82
5.5	Residuen zum Apollo 15-Reflektor	83
5.6	Vergleich des jährlichen wrms zu den Apollo-Reflektoren	83
5.7	Amplitudenspektrum der Residuen, gewichtet	84
5.8	Amplitudenspektrum der Residuen, ungewichtet	85
6.1	Entwicklung des Erde-Mond-Abstandes mit $\dot{G}/G = 1 \times 10^{-12} \text{ a}^{-1}$	89
6.2	Leistungsdichtespektrum der Differenzen aus Abbildung 6.1	90
6.3	Differenz der gewichteten Residuenspektren bei $\dot{G} \neq 0$	91
6.4	Differenz der ungewichteten Residuenspektren bei $\dot{G} \neq 0$	91
6.5	Histogramm der Normalpunkte über den synodischen Winkel	93
6.6	Entwicklung des Erde-Mond-Abstandes mit $\Delta(m_g/m_i)_{EM} = 5 \times 10^{-13}$	95
6.7	Leistungsdichtespektrum der Differenzen aus Abbildung 6.6	95
6.8	Differenz der ungewichteten Residuenspektren bei $\Delta(m_g/m_i)_{EM} \neq 0$	96
6.9	Histogramm der Normalpunkte über die ekliptikale Länge	98
6.10	Entwicklung des Erde-Mond-Abstandes mit $\alpha_{yuk} = 5 \times 10^{-11}$	100
6.11	Leistungsdichtespektrum der Differenzen aus Abbildung 6.10	100
6.12	Differenz der gewichteten Residuenspektren bei $\alpha_{yuk} \neq 0$	101

6.13	Entwicklung des Erde-Mond-Abstandes mit $h = 5 \times 10^{-3}$	102
6.14	Leistungsdichtespektrum der Differenzen aus Abbildung 6.13	102
6.15	Differenz der gewichteten Residuenspektren bei $h \neq 0$	103
6.16	Entwicklung des Erde-Mond-Abstandes mit $\beta - 1 = 5 \times 10^{-4}$	105
6.17	Leistungsdichtespektrum der Differenzen aus Abbildung 6.16	105
6.18	Differenz der gewichteten Residuenspektren bei $\beta \neq 1$	106
6.19	Entwicklung des Erde-Mond-Abstandes mit $\alpha_1 = 5 \times 10^{-5}$	107
6.20	Leistungsdichtespektrum der Differenzen aus Abbildung 6.19	107
6.21	Differenz der gewichteten Residuenspektren bei $\alpha_1 \neq 0$	108
7.1	Position der simulierten Stationen und Reflektoren	109
7.2	Residuen der simulierten Daten von OCA und APOLLO	110
7.3	Genauigkeiten aus simulierten Daten, ohne neue Stationen oder Reflektoren	110
7.4	Genauigkeiten aus simulierten Daten, neue Stationen, ohne neue Reflektoren	111
7.5	Genauigkeiten aus simulierten Daten, neue Reflektoren, ohne neue Stationen	112
7.6	Genauigkeiten aus simulierten Daten, neue Reflektoren und neue Stationen	112

Tabellenverzeichnis

3.1	Übersicht der verwendeten Normalpunkt-Datensätze	25
3.2	Statistik der Normalpunkte (Reflektoren)	27
3.3	Statistik der Normalpunkte (Observatorien)	28
3.4	Anpassung der Normalpunkt-Laufzeitgenauigkeiten für die Auswertung	28
4.1	Geoidhöhen an der Position der Observatorien	30
4.2	Effekt der lunaren h_2 -Schätzung auf die Genauigkeit der Apollo 15-Koordinaten . . .	33
4.3	Auswirkung der Integrationstoleranz auf die Mondephemeride	33
4.4	Effekt der Wechselwirkung der Planeten mit $C_{20,Erde}$ auf die Erdposition	34
4.5	Effekt der Planeten mit dem lunaren Grad-2 Schwerefeld auf die Mondephemeride .	36
4.6	Gravitationswechselwirkung zwischen ausgedehntem Mond und Erde als Punktmasse	39
4.7	Gravitationswechselwirkung zwischen ausgedehnter Erde und Mond als Punktmasse	39
4.8	Gravitationswechselwirkung zwischen ausgedehnter Erde und ausgedehntem Mond .	45
4.9	Effekt des variablen zonalen Schwerefeldes der Erde auf die Mondephemeride	48
5.1	Änderungen in den Apollo 15-Residuen bei Kernmodellierung	63
5.2	Geschätzte Dissipationsparameter und Lovezahl h_2 des Mondes	64
5.3	Geschätzte stationsabhängige Laufzeitkorrekturen	66
5.4	Stationskoordinaten aus LLR und Vergleich zum ITRF2008	67
5.5	Stationsgeschwindigkeiten aus LLR und Vergleich zum ITRF2008	67
5.6	Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten für LURE und MLRO	68
5.7	Stationskoordinaten und -geschwindigkeitsdifferenzen zur DTRF2008-Lösung	68
5.8	Parameter der Helmerttransformation zwischen LLR, DTRF2008-SLR, ITRF2008 .	69
5.9	Differenzen zur DTRF2008 und ITRF2008-Lösung nach der Helmerttransformation .	69
5.10	Geschätzte Störrotationen	70
5.11	Geschätzte Nutationskoeffizienten	71
5.12	Änderung der Stations- und Reflektorkoordinaten bei Nutationsschätzung	73
5.13	Reflektorkoordinaten im Hauptachsensystem und Vergleich zur DE430-Lösung . . .	74
5.14	Parameter der Helmerttransformation zu den DE430-Reflektorkoordinaten	74
5.15	Differenzen zu den DE430-Reflektorkoordinaten nach der Helmerttransformation . .	75
5.16	Abweichung des Mean-Earth-Systems vom Hauptachsensystem	75
5.17	Reflektorkoordinaten im ME-System und Vergleich zur DE430-Lösung	76
5.18	Änderung der Reflektorkoordinaten durch planetaren Einfluss auf Mondephemeride .	77
5.19	Schätzung der zeitlichen Verzögerung der Erdzeiten	77
5.20	Dynamische Parameter des Mondes	79
6.1	Variationen der Mondbahn in Richtung verschiedener ekliptikaler Längen	98
A.1	Stationskoordinaten a-priori	117
A.2	Local ties der McDonald- und LURE-Station	118
A.3	Stationsgeschwindigkeiten a-priori	118
A.4	Potentialkoeffizienten des Mondes bis Grad und Ordnung 6	119
A.5	Geschätzte Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten	120

A.6	Geschätzte Reflektorkoordinaten	120
A.7	Geschätzte Startwerte der Mondephemeride	121
A.8	Geschätzte stationsabhängige Laufzeitkorrekturen	121
A.9	Geschätzte Parameter für Mond und Erde als ausgedehnte Körper	122
A.10	Geschätzte relativistische Parameter	122

1 Einleitung

Motivation

Die bemannte Mondlandung der Apollo 11-Mission im südlichen Mare Tranquillitatis am 20.07.1969 markiert nicht nur einen Meilenstein in der Raumfahrt, sondern auch den Beginn eines neuen geodätischen Raumverfahrens - der Laserentfernungsmessung zum Mond, engl. Lunar Laser Ranging (LLR). Mit Hilfe von kurzen Laserpulsen wird seither die Entfernung zwischen einer Bodenstation auf der Erde und einem Retroreflektor auf dem Mond mit hoher Genauigkeit gemessen. Bis Anfang 2015 liegen fast 21000 Messwerte in Form von sogenannten Normalpunkten (NP) für die Analyse vor. Das Erde-Mond-System kann mit diesen Messungen seit 1969 als natürliches Laboratorium für die Analyse unterschiedlicher erd- und mondbezogener Parameter und zum Test von Gravitationstheorien genutzt werden. LLR bietet die Möglichkeit, Vorhersagen von Einsteins Gravitationstheorie im erdnahen Raum zu überprüfen und eine Obergrenze für mögliche Verletzungen der Einstein'schen Theorie anzugeben.

Die Analysezentren mit der längsten Erfahrung in der LLR-Auswertung sind das Jet Propulsion Laboratory (JPL) in den USA, das Paris Observatory Lunar Analysis Center (POLAC) und das Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides (IMCCE) in Frankreich, das Institute of Applied Astronomy of the Russian Academy of Sciences (IAA RAS) in Russland und das Institut für Erdmessung (IfE) in Deutschland. Die Forschungsgebiete zu denen LLR einen Beitrag liefert, lassen sich in vier Bereiche unterteilen:

1. Berechnung einer hochgenauen Mondephemeride: Grundlage der LLR-Analyse ist die hochgenaue Berechnung der Position und Orientierung des Mondes in einer Ephemeridenrechnung. Diese Informationen sind für die Navigation von Raumfahrzeugen zum Mond, Landemissionen auf dem Mond und der Realisierung eines lunaren Referenzrahmens von großer Bedeutung. Die bekanntesten Ephemeriden, in denen LLR-Daten verwendet werden, sind die aktuellen Versionen der amerikanischen DE-Ephemeride des JPL [Folkner u. a., 2014], die französische INPOP-Ephemeride des IMCCE [Fienga u. a., 2014b], die ELP-Ephemeride des POLAC [Bourgoin u. a., 2015] sowie die russische EPM-Ephemeride des IAA RAS [Pitjeva und Pitjev, 2014; Yagudina und Vasiliev, 2014].
2. Untersuchungen von physikalischen Eigenschaften des Mondes: Neben den Dissipations- und Gezeiteneffekten im festen Mantel entdeckten Williams u. a. [2001] einen Dissipationsbeitrag von der Grenze zwischen festem Mantel und flüssigem Kern, der damit erstmalig aus LLR-Daten nachgewiesen wurde. Weitere Ergebnisse zum inneren Aufbau des Mondes und zu physikalischen Parametern wurden mit Hilfe der lunaren Schwerefeldmission „Gravity Recovery and Interior Laboratory“ (GRAIL) in Kombination mit LLR-Daten ermittelt [Williams u. a., 2014]. Aktuelle Untersuchungen zu den Gezeiten- und Dissipationseffekten im Erde-Mond-System zeigen, dass weiterer Forschungsbedarf für ein genaues Verständnis der Effekte besteht [Williams und Boggs, 2015, 2016].
3. Erdbezogene Parameter: Neben den Koordinaten und Geschwindigkeiten der LLR-Bodenstationen können verschiedene Parameter der Erdorientierung aus LLR-Daten bestimmt werden. Zum Beispiel bestimmten Zerhouni und Capitaine [2009] zälestische Polkoordinaten und Biskupek [2015] langperiodische Nutationskoeffizienten, die Erdrotationsphase und terrestrische Polkoordinaten. Der Beitrag von LLR-Daten für die Festlegung von Referenzsystemen

wurde von [Chapront und Francou \[2006\]](#) am POLAC untersucht. Insbesondere die Nutationskoeffizienten können für eine zukünftige Kombination mit anderen geodätischen Raumverfahren genutzt werden.

4. Tests der Einstein'schen Gravitationstheorie: Die Analyse der LLR-Messungen erlaubt vielfältige Tests der Einstein'schen Gravitationstheorie, die in den letzten Jahren von verschiedenen Gruppen durchgeführt wurden, z.B. am Harvard-Smithsonian Center für Astrophysics [[Battat u. a., 2007](#)], am JPL [[Williams u. a., 2012](#); [Williams und Folkner, 2009](#)] und am IfE [[Müller und Biskupek, 2007](#); [Soffel u. a., 2008](#); [Hofmann u. a., 2013](#); [Müller u. a., 2014](#)].

Seit Beginn der LLR-Beobachtungen wurden sowohl die Genauigkeit der Messungen als auch die Analyse der Daten verbessert. Aktuelle Projekte mit einem neuen Typ von Retroreflektoren streben eine Messgenauigkeit im Millimeterbereich an [[Currie u. a., 2013](#)]. Um diese hohe Genauigkeit auch in der Auswertung optimal zu nutzen, ist es nötig, die Auswerteprogramme weiter zu entwickeln und die zugrundeliegenden Modelle mit dem Ziel einer Genauigkeit im Millimeterbereich zu verfeinern.

Zielsetzung und Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Dissertation knüpft an die Verbesserung der erdseitigen Modellierung von [Biskupek \[2015\]](#) an und legt den Fokus auf die Verbesserung der mondseitigen Modellierung in Richtung der millimetergenauen Auswertung. Mit dem verfeinerten Modell werden die Auswirkungen auf die geschätzten Parameter detailliert untersucht. Der Schwerpunkt liegt auf

- der erweiterten Modellierung der gravitativen Effekte der Körper des Sonnensystems auf die Mondephemeride,
- der verbesserten Modellierung der Mondrotation mit einem 2-Schichten-Modell aus festem Mantel und flüssigem Kern,
- der Analyse des Effekts auf die geschätzten Koordinaten der Stationen auf der Erde und Reflektoren auf dem Mond sowie
- Tests der Einstein'schen Gravitationstheorie.

Nach einer Übersicht über die Grundlagen der LLR-Messungen und das verwendete Auswerteprogramm in Kapitel 2 wird in Kapitel 3 die Aufdatierung der NP-Datengrundlage beschrieben. Es wurden verschiedene Datenquellen berücksichtigt und ein kombinierter Datensatz aus allen bis 2015 verfügbaren NP erstellt. Die Erweiterungen der Analysesoftware sind in Kapitel 4 beschrieben. Der Schwerpunkt liegt auf bisher nicht-modellierten gravitativen Einflüssen mit dem Mond als ausgedehntem Körper und der Neumodellierung der Mondrotation mit einem 2-Schichten-Modell aus festem Mantel und flüssigem Kern. Die Ergebnisse der verbesserten Modellierung sind in zwei Gruppen aufgeteilt. Die Parameter der sogenannten Standardlösung, auch als Newton'sche Parameter bezeichnet, werden in Kapitel 5 untersucht. Die Ergebnisse von Parametern zum Test der Einstein'schen Gravitationstheorie werden in Kapitel 6 dargestellt. Eine Steigerung der Messgenauigkeit von LLR ist in Zukunft mit neuen Einzelprisma-Reflektoren möglich [[Currie u. a., 2013](#)]. Um den Effekt auf einige mit LLR schätzbare Größen zu untersuchen, wurde ein Simulationsprogramm erstellt, mit dem sich Messungen von einer beliebigen Zahl an Observatorien und Reflektoren simulieren und auswerten lassen. In Kapitel 7 sind die Genauigkeiten einiger, aus LLR schätzbarer, Parameter mit simulierten Daten untersucht. Die Arbeit wird mit einer Zusammenfassung in Kapitel 8 abgeschlossen.

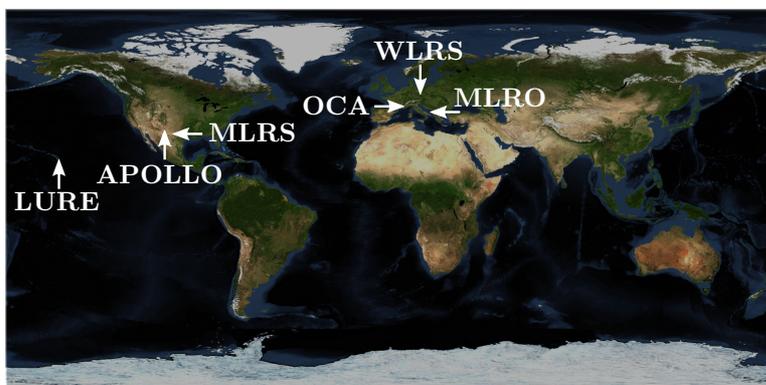
2 LLR-Grundlagen

2.1 Messprozess LLR

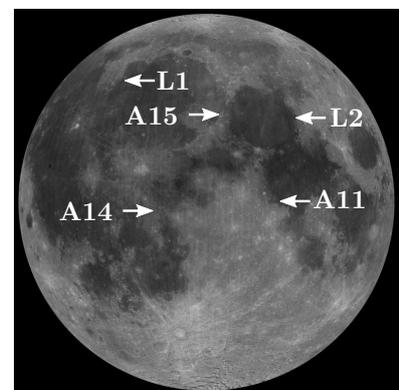
Von 1969 bis 1973 wurden insgesamt fünf passive Laser-Retroreflektoren zum Mond gebracht. Die Astronauten der Apollo 11-Mission stellten den ersten Reflektor (A11) im südlichen Mare Tranquillitatis auf. Die Position von zwei weiteren Reflektoren befindet sich an den Landstellen der Apollo 14-Mission (A14) nördlich des Kraters Fra Mauro und der Apollo 15-Mission (A15) zwischen Rima Hadley und Mons Hadley. An den sowjetischen Lunochod 1 und 2 Rovern, die bei den Missionen Luna 17 (nordwestliches Mare Imbrium) und Luna 21 (Krater Le Monnier) zum Mond gebracht wurden, befinden sich mit L1 und L2 zwei weitere Reflektoren. Die Apollo-Reflektoren bestehen aus einem Aluminiumrahmen in dem 100 (A11 und A14) beziehungsweise 300 (A15) Tripleprismen mit einem Durchmesser von jeweils 3.8 cm montiert sind [Bendix, 1971]. Auf den Lunochod-Rovern wurden französische Reflektoren genutzt, die aus 14 Einzelprismen mit einer Seitenlänge von jeweils 11 cm zusammengesetzt sind [Bender u. a., 1973].

Auf der Erde sind nur wenige Observatorien in der Lage, LLR-Messungen durchzuführen. In den USA ist es das Projekt Apache Point Observatory Lunar Laser-ranging Operation (APOLLO) in New Mexico, in Frankreich das Observatoire de la Côte d'Azur (OCA) in Grasse und in Italien das Matera Laser Ranging Observatory (MLRO). Die längste LLR-Datenreihe (von 1969 bis 2013) der McDonald Laser Ranging Station (MLRS¹) in Texas, USA, kann zurzeit aufgrund von finanziellen Problemen nur sehr eingeschränkt fortgesetzt werden. Von 1984 bis 1990 führte das Lunar Ranging Experiment Observatory (LURE) auf dem Mt. Haleakala (Hawaii) LLR-Messungen durch. Einzelne NP wurden auch von der australischen Station Orroral und auf der geodätischen Fundamentalstation in Wettzell mit dem Wettzell Laser Ranging System (WLRS) im Bayerischen Wald gemessen, wo der LLR-Betrieb demnächst wieder aufgenommen werden soll. In Abbildung 2.1a sind diejenigen Observatorien verzeichnet, deren LLR-Daten in der Auswertung des IfE verwendet werden.

¹Die LLR-Aktivitäten des McDonald Observatory wurden an drei verschiedenen Stationen durchgeführt, in zeitlicher Reihenfolge der Inbetriebnahme im Text als McDonald, MLRS1 und MLRS2 bezeichnet.



(a) Position aller Observatorien, deren Daten in der Auswertung genutzt werden



(b) Apollo- (A) und Lunochod- (L) Reflektoren

Abb. 2.1: Positionen der LLR-Observatorien und -Reflektoren (Quelle: NASA [2016], bearbeitet).

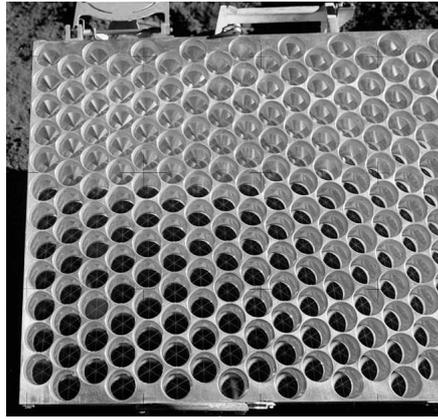


Abb. 2.2: Teil des Retroreflektors der Apollo 15-Mission (Quelle: NASA [2016]).

Bei den bisherigen LLR-Messungen wurde überwiegend ein gepulster Nd:YAG Laser im grünen Spektralbereich bei 532 nm verwendet [Murphy u. a., 2008]. Einzig das McDonald Observatory verwendete bis 1985 einen Rubinlaser mit einer Wellenlänge von 634 nm [Bender u. a., 1973]. Das OCA entwickelte ein kombiniertes LLR-System mit Wellenlängen von 532 nm und 1064 nm [Viswanathan u. a., 2015]. Die rund 100 ps langen Laserpulse der Stationen APOLLO und OCA formen nach Verlassen des Teleskops einzelne Strahlungsscheiben von rund 3 cm Dicke und einem Durchmesser entsprechend des Teleskopdurchmessers. Bei Pulsraten von 10 Hz bis 20 Hz sind etwa 25 bis 50 Laserpulse gleichzeitig zwischen Observatorium und Reflektor unterwegs. Die genaue Startzeit der einzelnen Pulse wird durch die Auskopplung eines kleinen Teils des ausgesendeten Lichtes und Aktivierung einer Uhr bestimmt.

Bei einer Energie von 100 mJ enthält ein einzelner Puls der APOLLO-Station rund 3×10^{17} Photonen [Murphy, 2013]. Das Laserlicht verlässt das Teleskop als nahezu paralleles Strahlenbündel und durchläuft danach die turbulente Atmosphäre, die eine Divergenz des Lichtes in der Größenordnung von 1 bis 4 Bogensekunden hervorruft. Sehr gute Standorte erreichen auch Werte unter einer Bogensekunde. Je nach Entfernung des Mondes nimmt der „Fußabdruck“ der Laserpulse eine Fläche zwischen 3 km^2 und 50 km^2 (senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des Lichtes, d.h. nahezu parallel zur Reflektornormalen) auf dem Mond ein. Die reflektierende Fläche der Reflektoren (Abbildung 2.2) beträgt dagegen nur 0.1 m^2 bis 0.34 m^2 . Beugungserscheinungen an den Retroreflektoren verursachen eine Divergenz des reflektierten Lichtes von rund 7.5 Bogensekunden, sodass der Signalverlust aufgrund von Strahldivergenz die Größenordnung von 10^{17} für eine Teleskopfläche von 1 m^2 erreicht. Zusammen mit Verlusten in den optischen Komponenten der Sende- und Empfangseinheit, dem zweimaligen Atmosphärendurchlauf, Reflektor-, Filter- und Detektoreigenschaften ergibt sich ein Gesamtverlust in der Größenordnung von 10^{18} . Pro Laserpuls detektiert APOLLO im Mittel rund 0.3 Photonen, an anderen LLR-Observatorien werden im Mittel weniger als 0.05 Photonen pro Puls empfangen [Murphy u. a., 2008, 2010, 2014; Murphy, 2013].

Der Empfänger, bestehend aus einer oder mehreren Lawinenphotodioden, ist für die Detektion von einzelnen Photonen ausgelegt. Aus einer Menge von Störphotonen, die zum Beispiel von der sonnenbeschienenen Mondoberfläche stammen, müssen die wenigen Photonen des Laserpulses extrahiert werden, die vom Retroreflektor zurückkehren. Dazu wird eine dreifache Filterung durchgeführt. Ein räumlicher Filter lässt nur das Licht eines wenige km^2 großen Bereiches der Mondoberfläche um den Reflektor passieren. Im spektralen Bereich wird durch ein engbandiges Filter mit einer Halbwertsbreite um 1 nm nur das Licht um die Wellenlänge des Lasers zum Detektor durchgelassen. Der effektivste Filter wird durch die zeitliche Steuerung der Dioden realisiert, die den Lawinenprozess nur in einem engen Zeitfenster um den vorherberechneten Empfangszeitpunkt erlaubt.

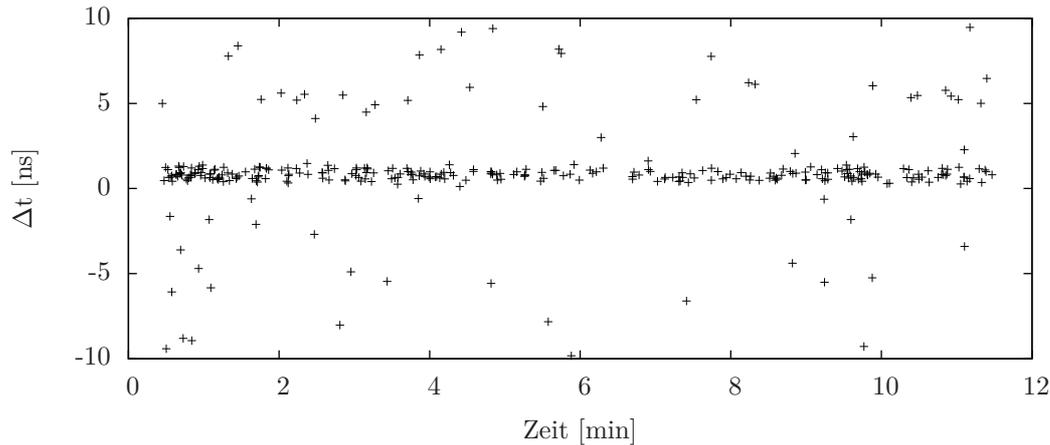


Abb. 2.3: Laufzeitdifferenzen Δt zwischen gemessener und berechneter Laufzeit von ursprünglich 3600 Einzelpulsen des OCA zum Apollo 15-Reflektor [Torre, persönliche Kommunikation, 2015].

Die gemessene Differenz aus Empfangs- und Startzeitpunkt des Laserpulses stellt die Messgröße der Einzelmessung dar. Ein einzelnes detektiertes Photon kann jedoch nicht zweifelsfrei dem ursprünglichen Laserpuls zugeordnet werden, es könnte sich ebenfalls um ein Störphoton handeln. Aus einer Messreihe über mehrere Minuten wird ein Normalpunkt erzeugt [Michelsen, 2010], der als ein einzelner Messwert in der Analyse verwendet wird. Die Laufzeitdifferenzen $\Delta t = \text{gemessen} - \text{berechnet}$ einer 12-minütigen Messreihe des OCA zum A15-Reflektor am 11.02.2015 sind in Abbildung 2.3 dargestellt und zeigen die vom Mond zurückgekehrten Photonen als Häufung in der Nähe von $\Delta t = 1$ ns. Aus 3600 Laserpulsen wurden rund 150 Photonen vom Reflektor registriert und zu einem NP zusammengefasst. Von 1969 bis 2015 wurden über 21000 NP bestimmt, deren Verteilung und Aktualisierung in Kapitel 3 behandelt wird. Die wichtigsten Informationen eines Normalpunktes sind der Startzeitpunkt des Laserpulses, die Lichtlaufzeit τ_{NP} sowie meteorologische Parameter zu Temperatur und Luftdruck. Je nach Normalpunktformat können weitere Informationen zur Messung gespeichert sein [Ricklefs und Moore, 2009].

2.2 Analyse der LLR-Messungen mit LUNAR

Die LLR-Auswertung der vorliegenden Dissertation erfolgt mit dem Programmpaket LUNAR. Die Entwicklung von LUNAR begann an der Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie in München im Rahmen des Sonderforschungsbereiches 78 unter der Leitung von Prof. Dr. Manfred Schneider [Schneider, 1990]. Die Grundlagen des Programms wurden in den Arbeiten von Egger [1985], Gleixner [1986], Schastok [1987] und Bauer [1989] gelegt. Die relativistischen Bewegungsgleichungen wurden von Müller [1991] mit Hilfe des Brumberg-Kopejkin-Formalismus in einer modifizierten Version gemäß dem parametrisierten post-Newton'schen (PPN) Ansatz formuliert [Brumberg und Kopejkin, 1989a,b; Kopeikin u. a., 2008]. Dies erlaubt den Test von verschiedenen relativistisch bedeutsamen Parametern. Die ursprüngliche FORTRAN77-Version des Programms wurde von Reichhoff [1999] in C++ umgeschrieben, die Bewegungsgleichungen wurden dabei gemäß des Damour-Soffel-Xu-Formalismus verwendet [Damour u. a., 1991, 1992, 1993, 1994]. Die Version von Müller wurde am IfE um einen neuen Integrator nach Adams-Bashford erweitert und auf FORTRAN90 umgeschrieben [Koch, 2005; Montenbruck und Gill, 2000]. Parallel zur Bearbeitung der vorliegenden Dissertation untersuchte Biskupek [2015] die Schätzung von Erdrotationsparametern aus LLR, bestimmte Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten für eine Kombination von LLR mit Satellite Laser Ranging (SLR) und führte Tests zur Konstanz der Gravitationskonstanten sowie zum Gravitomagnetismus durch. Im Auswerteprogramm wurden die das System Erde

betreffenden Modelle, insbesondere der zeitlichen Variationen der Stationskoordinaten und Transformationen zwischen erd- und raumfesten Referenzsystem, aktualisiert.

Die Auswertung vergleicht die gemessene Laufzeit τ_{NP} und die, mit Hilfe der Lichtgeschwindigkeit c , berechnete Länge des Lichtweges zwischen Observatorium und Retroreflektor

$$\varrho_{NP} = \tau_{NP} c \quad (2.1)$$

mit der berechneten Länge des Lichtweges

$$\varrho_{rech} = (\tau_{hin} + \tau_{rück} + \Delta\tau_{rel} + \Delta\tau_{atmo} + \Delta\tau_{syn} + \Delta\tau_{syst}) c . \quad (2.2)$$

Die Bestimmung der freien Parameter erfolgt in einer Kleinsten-Quadrate-Ausgleichung basierend auf dem Gauss-Markov-Modell. Die Lichtlaufzeit zwischen Station und Retroreflektor ist für den Hinweg mit τ_{hin} , für den Rückweg mit $\tau_{rück}$ bezeichnet. Änderungen in den Signallaufzeiten ergeben sich in der relativistischen Zeittransformation zwischen Terrestrischer Zeit (TT) und Baryzentrisch Dynamischer Zeit (TDB) und beim Durchlauf des Lichtes durch das Gravitationsfeld von Sonne und Erde (Shapiro-Verzögerung) $\Delta\tau_{rel}$ [Shapiro, 1964; Moyer, 1971] sowie beim Durchlauf des Lichtes durch die Atmosphäre $\Delta\tau_{atmo}$ (Kapitel 4.1.2). Der Effekt des Strahlungsdruckes und der Abstrahlung der aufgenommenen Sonnenenergie im infraroten Bereich des Spektrums verursacht eine synodische Modulation der Mondbahn und wird nach Vokrouhlicky [1997] mit $\Delta\tau_{syn}$ modelliert. Systematische Laufzeitkorrekturen an der Bodenstation werden über $\Delta\tau_{syst}$ berücksichtigt.

Der Auswertung liegt ein im Baryzentrum des Sonnensystems gelagertes inertiales Referenzsystem zugrunde. Aus historischen Gründen wird in LUNAR ein Ekliptiksystem verwendet, das über eine Rotation um die x-Achse mit dem Ekliptikwinkel $\epsilon_0 = 84381.406$ Bogensekunden aus dem Baryzentrischen Himmelsreferenzsystem (BCRS) hervorgeht. Alle benötigten Vektoren müssen in das baryzentrische System transformiert werden. Die korrespondierende Zeitskala ist TDB, abweichende Zeitskalen müssen nach TDB transformiert werden. Die Startzeitpunkte der Laserpulse liegen in Universeller Koordinierter Weltzeit (UTC) vor. Über die Zwischenschritte Internationale Atomzeit (TAI), TT sowie Geo- und Baryzentrische Koordinatenzeit (TCG und TCB) wird der Startzeitpunkt in TDB berechnet. Das Verfahren wird in Biskupek [2015] näher erläutert.

Abbildung 2.4 zeigt das Prinzip der LLR-Messung. Alle Vektoren müssen für die Auswertung im inertialen System vorliegen. Dargestellt sind die Vektoren:

- \mathbf{x}_E ... baryzentrischer Vektor zum Geozentrum zur Zeit t_1 ,
- \mathbf{x}_M ... baryzentrischer Vektor zum Selenozentrum zur Zeit t_2 ,
- $\mathbf{x}_{EM} = \mathbf{x}_M - \mathbf{x}_E$... Erde-Mond-Vektor des Licht-Hinweges,
- \mathbf{x}_{Sta} ... Vektor Geozentrum-Station im baryzentrischen System zu den Zeiten t_1 und t_3 ,
- \mathbf{x}_{Ref} ... Vektor Selenozentrum-Reflektor im baryzentrischen System zur Zeit t_2 ,
- $\varrho_{12}, \varrho_{23}$... Lichtweg Station-Reflektor für Hin- und Rückweg, entsprechend den Laufzeiten τ_{hin} und $\tau_{rück}$.

Die Lichtlaufzeit τ_{hin} berechnet sich zu

$$\tau_{hin} = \frac{\varrho_{12}}{c} = \frac{|\mathbf{x}_M(t_2) + \mathbf{x}_{Ref}(t_2) - \mathbf{x}_E(t_1) - \mathbf{x}_{Sta}(t_1)|}{c} \quad (2.3)$$

und $\tau_{rück}$ zu

$$\tau_{rück} = \frac{\varrho_{23}}{c} = \frac{|\mathbf{x}_E(t_3) + \mathbf{x}_{Sta}(t_3) - \mathbf{x}_M(t_2) - \mathbf{x}_{Ref}(t_2)|}{c} . \quad (2.4)$$

Die erforderlichen baryzentrischen Positions- und Geschwindigkeitsvektoren von Erde und Mond sowie die Orientierung des Mondes werden aus einer Ephemeridenrechnung der Körper des Sonnensystems bestimmt. Die Variationen in den Signallaufzeiten $\Delta\tau_{atmo}$ und $\Delta\tau_{rel}$ werden mit der

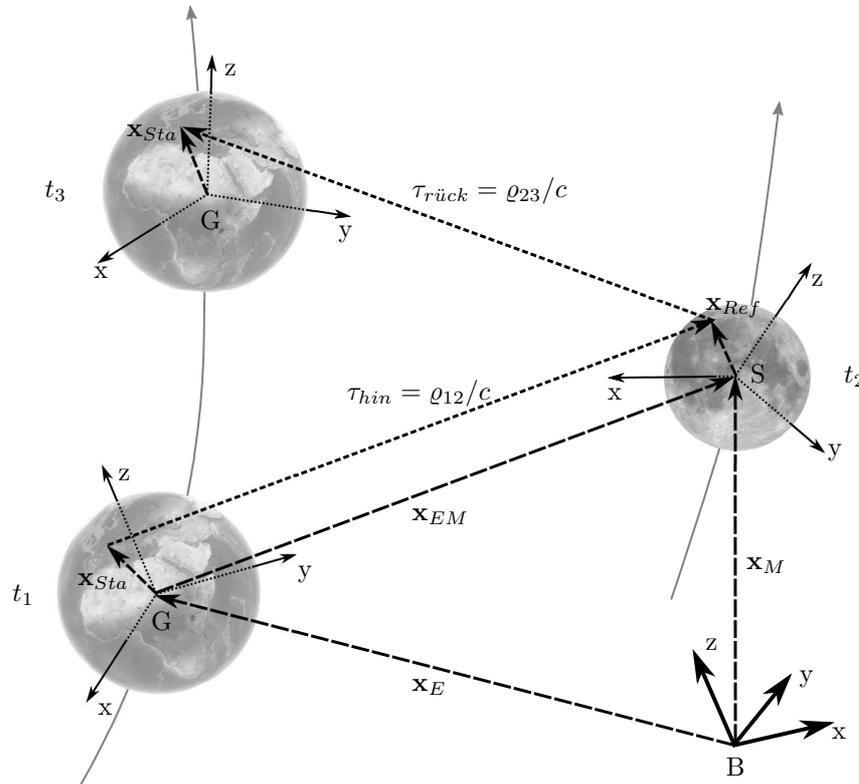


Abb. 2.4: Schema der LLR-Messung im Erde-Mond-System mit Baryzentrum des Sonnensystems B , Geozentrum G und Selenozentrum S zum Startzeitpunkt t_1 , Reflexionszeitpunkt t_2 und Empfangszeitpunkt t_3 .

neu erstellten Programmversion von LUNAR in dieser Arbeit für den Hin- und Rückweg getrennt berechnet und angebracht. Synodische Effekte $\Delta\tau_{syn}$ werden nach der Berechnung der Laufzeiten angebracht, da diese nicht im dynamischen Modell der Ephemeridenrechnung enthalten sind. Weiterhin wird für die Berechnung der in der Ausgleichung benötigten partiellen Ableitungen eine Näherung der Entfernung ρ_2 zwischen Station und Reflektor zum Zeitpunkt t_2 eingeführt, mit

$$\begin{aligned}\rho_2 &= |\mathbf{x}_E(t_2) + \mathbf{x}_{Sta}(t_2) - \mathbf{x}_M(t_2) - \mathbf{x}_{Ref}(t_2)| \\ &= |\mathbf{x}_{EM}(t_2) + \mathbf{x}_{Sta}(t_2) - \mathbf{x}_{Ref}(t_2)|.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Die Auswertung stützt sich auf drei Programmteile. Im Teilprogramm EPHEM werden die Ephemeriden (Positionen und Geschwindigkeiten) der größeren Körper des Sonnensystems sowie die Orientierung des Mondes berechnet. Das Teilprogramm AVAR berechnet die dynamischen Ableitungen der Entfernungsgleichung nach den zu schätzenden Parametern und das Teilprogramm PAR dient der Berechnung weiterer Ableitungen und der Parameterschätzung.

2.2.1 Teilprogramm EPHEM - Berechnung der Ephemeriden

Translationsbewegung

Die Translationsbewegung aller Planeten, der Sonne, des Mondes und der massereichsten Asteroiden (Ceres, Vesta und Pallas) wird durch die numerische Integration der relativistischen Einstein-Infeld-Hoffmann (EIH)-Bewegungsgleichungen modelliert [Einstein u. a., 1938]. Die Körper werden hierbei als Punktmassen, identisch mit ausgedehnten Körpern mit sphärisch symmetrischen Äquipotentialflächen des körpereigenen Gravitationsfeldes, betrachtet. Das zugrundeliegende Modell basiert auf Einsteins Gravitationstheorie und liegt bis zur ersten nach-Newton'schen Ordnung ($1/c^2$) vor. Die Beschleunigung \mathbf{a}_A eines Körpers A in Abhängigkeit von allen übrigen betrachteten Körpern wird

beschrieben durch

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_A = & \sum_{B \neq A} \frac{GM_B}{R_{AB}^3} (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) \\
& + \sum_{B \neq A} \left[\frac{GM_B}{c^2 R_{AB}^3} (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) \left(-(2\gamma + 2\beta) \sum_{C \neq A} \frac{GM_C}{R_{AC}} + \gamma \mathbf{v}_A^2 + (\gamma + 1) \mathbf{v}_B^2 - (2\gamma + 2) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B \right. \right. \\
& \quad - \frac{3}{2} \left(\frac{(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \cdot \mathbf{v}_B}{R_{AB}} \right)^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) \cdot \sum_{C \neq B} \frac{GM_C}{R_{BC}^3} (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_B) \\
& \quad \left. \left. - (2\beta - 1) \sum_{C \neq B} \frac{GM_C}{R_{BC}} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{GM_B}{c^2} \left(\frac{1}{R_{AB}^3} (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \cdot ((2\gamma + 2) \mathbf{v}_A - (1 + 2\gamma) \mathbf{v}_B) (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{2R_{AB}} (3 + 4\gamma) \sum_{C \neq B} \frac{GM_C}{R_{BC}^3} (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_B) \right) \right] , \tag{2.6}
\end{aligned}$$

siehe auch Will [1993]. GM ist die Gravitationskonstante multipliziert mit der Masse des jeweiligen Körpers, \mathbf{x} und \mathbf{v} der baryzentrische Orts- und Geschwindigkeitsvektor, R der räumliche Abstand zwischen zwei Körpern und c die Lichtgeschwindigkeit. Der Nichtlinearitätsparameter β und Raumkrümmungsfaktor γ werden gemäß der Einstein'schen Theorie zu eins gesetzt. Mögliche Abweichungen vom Einstein'schen Wert werden in Kapitel 6 untersucht.

Zu der relativistisch formulierten Bewegung von Punktmassen, werden zusätzliche nicht-relativistische (Newton'sche) Beschleunigungen addiert, die sich aus den Inhomogenitäten der Schwerefelder von Sonne, Mond und Erde ergeben. Bislang waren im Programm die Kopplungen zwischen dem Gravitationsfeld des Mondes bis Grad und Ordnung 4 und der Erde als Punktmasse, dem zonalen Gravitationsfeld der Erde bis Grad 4 mit dem Mond als Punktmasse sowie die Kopplung des Sonnenabplattung mit den Planeten und Mond als Punktmasse enthalten. Eine zusätzliche Beschleunigung des Mondes aufgrund der Erdzeiten wurde nach Bauer [1989] modelliert. Die Erweiterung der bestehenden Modelle ist in Kapitel 4.2 beschrieben.

Die Ephemeridenrechnung kann um weitere Teile, zum Beispiel einer Zeitabhängigkeit der Gravitationskonstanten G , erweitert werden. Das erlaubt die Schätzung verschiedener Parameter für Tests der zugrundeliegenden Einstein'schen Gravitationstheorie, die in Kapitel 6 diskutiert werden.

Rotationsbewegung

Die Rotationsbewegungen von Erde und Mond werden unterschiedlich modelliert. Während die Erdorientierung konsistent nach den International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS) Conventions 2010 berechnet wird (Kapitel 2.2.3 und Biskupek [2015]), wird die Rotation des Mondes simultan mit der Berechnung der Translationsbewegung integriert. Die Berechnung des Rotationsvektors $\boldsymbol{\omega}$ im lunaren Hauptachsensystem (HAS), erfolgte bislang für einen elastischen und dissipativen Mond nach der Modellierung von Bauer [1989] durch Integration der Euler-Liouville Gleichung [Schneider, 1992]

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}^{-1}(\mathbf{T} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} - \dot{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}) . \tag{2.7}$$

Die elastischen Eigenschaften werden als zeitabhängige Zuschläge zum Trägheitstensor \mathbf{I} modelliert und das dissipative Verhalten als Verzögerung in der Reaktion des Mondes auf äußere Kräfte, hier als Drehmoment \mathbf{T} , dargestellt. Die Orientierung des lunaren HAS bezüglich des baryzentrischen Systems wird durch drei Eulerwinkel ψ , ϑ und φ beschrieben. Der Zusammenhang zwischen dem

Rotationsvektor und den Eulerschen Winkelgeschwindigkeiten wird über

$$\dot{\psi} = (\omega_x \sin \varphi + \omega_y \cos \varphi) / \sin \vartheta , \quad (2.8a)$$

$$\dot{\vartheta} = \omega_x \cos \varphi - \omega_y \sin \varphi , \quad (2.8b)$$

$$\dot{\varphi} = -\cot \vartheta (\omega_x \sin \varphi + \omega_y \cos \varphi) + \omega_z \quad (2.8c)$$

hergestellt [Schneider, 1992]. Die Lösung des gekoppelten Systems von sechs Differentialgleichungen aus Gleichung (2.7) und (2.8) führt zu den Eulerwinkeln. Die Erweiterung des Rotationsmodells wird in Kapitel 4.3 beschrieben.

Analog zur Translationsbewegung werden zusätzliche Drehmomente aus der Wechselwirkung von Sonne und Erde als Punktmassen mit dem Mondgravitationsfeld bis Grad und Ordnung 4 sowie ein Drehmoment aus der Kopplung zwischen den Grad-2 Termen des Gravitationsfeldes von Erde und Mond berücksichtigt. Neben der bis hierhin rein Newton'schen Behandlung der Rotation werden zusätzliche relativistische Drehmomente aus der geodätischen Präzession und Lense-Thirring Präzession angebracht [Müller, 1991]. Die geodätische Präzession entsteht beim Umlauf des „Erde-Mond-Kreisels“ im Gravitationsfeld der Sonne [de Sitter, 1916], die Lense-Thirring Präzession durch den Umlauf des Mondes im Gravitationsfeld der rotierenden Erde [Lense und Thirring, 1918].

2.2.2 Berechnung der partiellen Ableitungen

Für die Berechnung der partiellen Ableitungen für die Ausgleichung wird Gleichung (2.5) nach den zu schätzenden Parametern p abgeleitet. Mit den Vektoren \mathbf{x}_{EM} , \mathbf{x}_{Sta} und \mathbf{x}_{Ref} im baryzentrischen System ergibt sich die Grundgleichung der Ableitungen zu

$$\frac{\partial \varrho}{\partial p} = \frac{\varrho}{\varrho} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_{EM}}{\partial p} + \frac{\mathbf{x}_{Ref}}{\partial p} - \frac{\mathbf{x}_{Sta}}{\partial p} \right) . \quad (2.9)$$

Der Berechnungszeitpunkt entspricht für jeden NP dem Reflexionszeitpunkt t_2 . Die Ableitungen werden je nach Parameter auf drei verschiedene Arten berechnet und im Programmteil PAR zusammengesetzt:

1. Analytisch: Für geometrisch aus Gleichung (2.5) bestimmbare Parameter wie Stations- und Reflektorkoordinaten, Geschwindigkeit der Stationen aufgrund von Plattenbewegungen oder Nutationskoeffizienten, werden analytische Ableitungen gebildet.
2. Semi-analytisch: Die Teilableitungen der dynamischen Größen, zum Beispiel die Position und Orientierung des Mondes und deren Startwerte oder Potentialkoeffizienten des Mondes, nach dem geschätzten Parameter p in den Ableitungsteilen $\partial \mathbf{x}_{EM} / \partial p$ und $\mathbf{x}_{Ref} / \partial p$ werden durch Integration der Bewegungsgleichungen eines vereinfachten Ephemeridenmodells berechnet. Die Berechnung erfolgt im Programmteil AVAR.
3. Numerisch: Die partiellen Ableitungen werden durch numerische Differentiation zwischen zwei Ephemeriden mit leicht veränderten Parametern $(p + \Delta h, p - \Delta h)$ berechnet. Dieses Verfahren wird zum Beispiel für Ableitungen nach den relativistischen Parametern (Kapitel 6) eingesetzt. Der Vorteil dieser Methode liegt in der Berücksichtigung des kompletten Ephemeridenmodells zur Berechnung der Ableitung. Der Nachteil liegt im deutlich erhöhten Rechenaufwand aufgrund der mehrfach durchzuführenden Ephemeridenrechnung. Die Grundgleichung

(2.9) lautet dann

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varrho}{\partial p} &= \frac{\varrho}{\varrho} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_{EM}}{\partial p} + \frac{\mathbf{x}_{Ref}}{\partial p} \right) \\
&= \frac{\varrho}{\varrho} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_{EM}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{D}_M^T}{\partial p} \mathbf{x}_{Ref} \right) \\
&= \frac{\varrho}{\varrho} \left(\frac{\partial \mathbf{x}_{EM}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{D}_M^T}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \mathbf{x}_{Ref} \right),
\end{aligned} \tag{2.10}$$

mit der Drehmatrix \mathbf{D}_M^T , die zwischen HAS und inertialem System transformiert und den Eulerwinkeln $\Phi = [\psi \ \vartheta \ \varphi]^T$ [Bauer, 1989]. Aus den beiden Ephemeriden können die Ableitungen $\partial \mathbf{x}_{EM}/\partial p$ und $\partial \Phi/\partial p$ über

$$\frac{\partial \mathbf{x}_{EM}}{\partial p} = \frac{\mathbf{x}_{EM}(p + \Delta h) - \mathbf{x}_{EM}(p - \Delta h)}{2\Delta h} \tag{2.11}$$

berechnet werden. Gleichung (2.11) gilt analog für $\partial \Phi/\partial p$.

2.2.3 Programmteil PAR - Parameterschätzung

Im Teilprogramm PAR werden alle benötigten partiellen Ableitungen zusammengesetzt, die modellierte Länge des Lichtweges ϱ_{rech} berechnet und mit dem gemessenen Wert ϱ_{NP} verglichen. Das Modell wird in einer Kleinsten-Quadrate-Ausgleichung auf die Beobachtungen angepasst [Biskupek, 2015]. Das funktionale Modell der Ausgleichung basiert auf den Gleichungen (2.3) und (2.4). Neben den im EPHEMER berechneten baryzentrischen Positions- und Geschwindigkeitsvektoren der Körper müssen die im jeweiligen körperfesten Referenzsystem vorliegenden Vektoren der Observatorien und Retroreflektoren in das baryzentrische System transformiert werden. An die vorliegenden Ortsvektoren der Stationen im Internationalen terrestrischen Referenzsystem (ITRS) werden zuerst folgende zeitliche Änderungen in den Koordinaten angebracht [Biskupek, 2015]:

- Stationsbewegung aufgrund Plattentektonik;
- Gezeiten der festen Erde;
- Auflasten durch Ozeangezeiten;
- Auflasten der Atmosphäre;
- Rotationsdeformation durch Polgezeiten;
- Auflasten durch Ozeanpolgezeiten und
- langperiodische Breitenschwankungen.

Danach wird der Stationsvektor $\mathbf{x}_{Sta,ITRS}$ gemäß den IERS Conventions 2010 [Petit und Luzum, 2010] vom erdfesten ITRS in ein geozentrisches System mit den Achsen parallel zum Ephemeriden-Ekliptiksystem (\mathbf{x}_{Sta,Ekl_geo}) über

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{Sta,Ekl_geo} &= \mathbf{D}_E^T \mathbf{x}_{Sta,ITRS} \\
&= \mathbf{E} \mathbf{S}(dt) \mathbf{Q}(dt) \mathbf{R}(dt) \mathbf{W}(dt) \mathbf{x}_{Sta,ITRS}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

rotiert, das aus dem geozentrischen himmelfesten Referenzsystem (GCRS) durch eine Rotation \mathbf{E} um die x-Achse mit ϵ_0 hervorgeht. Die Drehmatrix \mathbf{D}_E beschreibt die Transformation vom Ekliptiksystem in das erdfeste System. In \mathbf{S} werden Störrotationen beziehungsweise Abweichungen zwischen den Referenzsystemen modelliert, \mathbf{Q} beschreibt die Bewegung des intermediären Himmelspols (CIP) im raumfesten System, \mathbf{R} die Rotation der Erde und \mathbf{W} die Polbewegung im erdfesten System. Das Argument dt gibt die Zeitdifferenz zu J2000.0 in julianischen Jahrhunderten an. Für den Übergang

in das baryzentrische System zu \mathbf{x}_{Sta} müssen zusätzliche relativistische Effekte aufgrund der Bewegung (Lorentz-Effekt) im Gravitationsfeld der Sonne (Einstein-Effekt) an den Stationskoordinaten mit

$$\mathbf{x}_{Sta} = \mathbf{x}_{Sta,Ekl_geo} \left(1 - \frac{U_{GS}}{c^2} - L_C \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{v}_E \mathbf{x}_{Sta,Ekl_geo}}{c^2} \right) \mathbf{v}_E \quad (2.13)$$

berücksichtigt werden [Misner u. a., 1973]. U_{GS} ist das Gravitationspotential der Sonne im Geozentrum, \mathbf{v}_E die baryzentrische Geschwindigkeit der Erde und L_C ein Skalierungsfaktor, siehe Petit und Luzum [2010]. Eine ausführliche Beschreibung der Variationen der Stationskoordinaten und der implementierten Transformation zwischen dem erdfesten und raumfesten System findet sich in Biskupek [2015].

Die Koordinaten der Retroreflektoren auf dem Mond liegen im lunaren Hauptachsensystem HAS als $\mathbf{x}_{Ref,HAS}$ vor. Die Drehmatrix \mathbf{D}_M beschreibt die Transformation vom Ekliptiksystem in das HAS des Mondes über die Eulerwinkel mit

$$\mathbf{D}_M = \mathbf{R}_z(\varphi) \mathbf{R}_x(\vartheta) \mathbf{R}_z(\psi) . \quad (2.14)$$

Daraus folgt die Transformation in das Ekliptiksystem zu

$$\mathbf{x}_{Ref,Ekl}^M = \mathbf{D}_M^T \mathbf{x}_{Ref,HAS} . \quad (2.15)$$

Die relativistischen Korrekturen für den Übergang zu \mathbf{x}_{Ref} im baryzentrischen System berechnen sich zu

$$\mathbf{x}_{Ref} = \mathbf{x}_{Ref,Ekl} \left(1 - \frac{U_{SS}}{c^2} - L_B \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{v}_M \mathbf{x}_{Ref,Ekl_geo}}{c^2} \right) \mathbf{v}_M . \quad (2.16)$$

U_{SS} ist das Gravitationspotential der Sonne im Selenozentrum, \mathbf{v}_M die baryzentrische Geschwindigkeit des Mondes und L_B ein Skalierungsfaktor [Biskupek, 2015].

Im verwendeten stochastischen Modell werden die Beobachtungen als unkorreliert angenommen und die Gewichte aus den Laufzeitgenauigkeiten der NP berechnet. Ein Überblick über die geschätzten Parameter findet sich in Kapitel 5 und 6 sowie in Biskupek [2015].

3 Aktualisierung der Normalpunkte

Ein Vergleich der NP-Datensätze des JPL, POLAC und IfE zeigte, dass von den Analysegruppen kein einheitlicher Datensatz verwendet wird [Williams und Bouquillon, persönliche Kommunikation, 2013]. Eine mögliche Ursache liegt in der Nachprozessierung von NP an den LLR-Stationen, bei denen von einem gemessenen Datensatz mehrere verschiedene NP erzeugt wurden und die Analysegruppen unterschiedliche Versionen des NP verwenden. Eine weitere Ursache könnte der unterschiedliche Umgang mit Ausreißern im NP-Datensatz sein. Wenn Ausreißer aus dem Datensatz entfernt werden, würden unterschiedliche Methoden der einzelnen Gruppen zur Ausreißerdetektion auch unterschiedliche Datensätze erzeugen.

Um einen möglichst kompletten Datensatz aller verfügbaren LLR-Normalpunkte zu erzeugen, wurde der bisher am IfE verwendete Datensatz mit den Datensätzen des JPL, des POLAC sowie mit den Datensätzen des Crustal Dynamics Data Information System (CDDIS) und EUROLAS Data Center (EDC) kombiniert. Tabelle 3.1 fasst alle vorhandenen Einzeldatensätze zusammen. Die Datensätze liegen in vier verschiedenen Formaten vor. Das ZN-Format wird als Format 1, das Mini-NP-Format als Format 2, das CSTG-Format als Format 3 und das neue CRD-Format als Format 4 bezeichnet. Der Zeitraum der Messungen ist im IfE-eigenen LLR Julianischen Datum JD_{LLR} angegeben und wird aus dem vollständigen Julianischen Datum über

$$JD_{LLR} = JD - 2440000.0 \quad (3.1)$$

berechnet. Die NP werden in das für LUNAR lesbare IfE-Format umgewandelt und enthalten folgende Informationen:

- UTC-Sendezeitpunkt in JD_{LLR}
- Lichtlaufzeit in s
- Genauigkeit der Messung in ns
- Lufttemperatur in °C
- Luftdruck in hPa
- Reflektorcode
- Stationscode des International Laser Ranging Service (ILRS)
- relative Luftfeuchtigkeit in %
- Wellenlänge des Lasers in μm
- Anzahl der Einzelmessungen zur Bildung des NP
- Herkunftscode des NP
- Release des NP (falls vorhanden, sonst 0)

Mit der Nummer des Herkunftscode sind 12 Datenquellen verknüpft:

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------|
| 1 - IfE, alte Beobachtungsdatei | 7 - OCA, private Kommunikation |
| 2 - JPL, private Kommunikation | 8 - CDDIS, Format 1 |
| 3 - POLAC, private Kommunikation | 9 - CDDIS, Format 2 |
| 4 - APOLLO, private Kommunikation | 10 - CDDIS, Format 3 |
| 5 - Matera, private Kommunikation | 11 - CDDIS, Format 4 |
| 6 - Wettzell, private Kommunikation | 12 - EDC, Format 3 und 4 |

Tab. 3.1: Zur Verfügung stehende NP-Datensätze von 1969-2015 mit Angabe des überdeckten Zeitraums in JD_{LLR} , des Ursprungsformates, Anzahl der enthaltenen NP und des Herkunftscodes.

Datensatz	Zeitraum	Ursprungsformat	Anzahl NP	Herkunftscodes
CDDIS1.ife	468.9 - 6733.1	Format 1	3523	8
CDDIS2.ife	6802.7 - 10993.6	Format 2	2073	9
CDDIS3.ife	10239.9 - 16285.4	Format 3	5526	10
format4.ife	14688.6 - 16282.6	Format 4	1043	11, 12
JPL_may2012.ife	661.7 - 16050.4	Format 2	17688	2
POLAC_2013.ife	453.6 - 16433.4	Format 2	20471	3
OCA2_1.ife	7081.4 - 11542.7	Format 2	6017	7
OCA2_2.ife	5798.2 - 6594.3	Format 2	1187	7
OCA3.ife	15146.6 - 16285.4	Format 3	303	7
Matera3.ife	15230.5 - 15161.2	Format 3	8	5
ife_2005.ife	661.7 - 13402.7	-	15717	1
np_update_20131113.ife	13832.7 - 16593.7	Format 3, 4	3827	7, 11, 12
np_update_20140116.ife	16023.7 - 16668.2	Format 3, 4	513	4, 7, 12
np_update_20150127.ife	16018.6 - 17037.7	Format 4	1256	4, 7, 12

Die gemessenen Laufzeiten des 2.7 m Teleskops der Station McDonald müssen vor der weiteren Verwendung homogenisiert werden. Die rund 18 m entsprechende 1-Weg-Laufzeitkorrektur in den Messungen wird in LUNAR als zusätzlicher Parameter angebracht, während er in den Datensätzen des JPL und POLAC direkt in den Laufzeiten der NP integriert ist. Zu den Laufzeiten der POLAC-NP müssen 1.206×10^{-7} s addiert werden [Bouquillon, persönliche Kommunikation, 2013]. Die 2-Wege-Laufzeitkorrektur in den NP des JPL wurde aus den Daten auf 1.21746×10^{-7} s geschätzt und an die NP-Laufzeiten angebracht.

Ein weiterer Offset ist in den Residuen der POLAC-NP und in den CDDIS-NP für die Zeit bis 01.01.1972 vorhanden. In der Zeit vom 01.02.1968 bis 01.01.1972 wird die Differenz zwischen TAI und UTC durch eine lineare Funktion von UTC berechnet [McCarthy und Seidelmann, 2009]

$$t_{TAI} - t_{UTC} = 4.213170 \text{ s} + 0.002592 \text{ s/d} (t_{UTC} - 39126) , \quad (3.2)$$

das Zeitargument auf der rechten Seite ist im Modifizierten Julianischen Datum zu verwenden. Wird die Laufzeit im NP als UTC-Differenz des Empfangs- und Sendezeitpunkt $\Delta t_{UTC} = t_3 - t_1$ angegeben, muss neben der Umrechnung des Sendezeitpunktes in TAI (Kapitel 2.2) auch die Laufzeit korrigiert werden. Aus Gleichung (3.2) folgt

$$\Delta t_{TAI} = \Delta t_{UTC} (1 + 3.0 \times 10^{-8}) . \quad (3.3)$$

Werden die Laufzeiten der POLAC-NP und CDDIS-NP auf TAI umgerechnet, verschwindet der Offset in den Residuen bis 1972, siehe Abbildung 3.1 am Beispiel der CDDIS-Daten. In den NP des JPL und alten IfE-Datensatzes sind die Laufzeiten bereits an TAI angepasst.

Die aus allen Einzeldateien in Tabelle 3.1 erzeugte Gesamtdatei „NPall.ife“ enthält 79152 NP. Das Aussortieren von identischen NP wird in mehreren Bearbeitungsschritten durchgeführt.

1. Aussortieren von identischen NP in allen Einträgen (2046 NP entfernt).
2. Aussortieren von identischen NP mit unterschiedlichem Herkunftscodes. NP mit höherem Herkunftscodeswert werden behalten, falls deren Eintrag „Anzahl der Einzelmessungen“ mit einem Wert belegt ist. Dies gilt ebenfalls für die folgenden Auswahlkriterien (18818 NP entfernt).

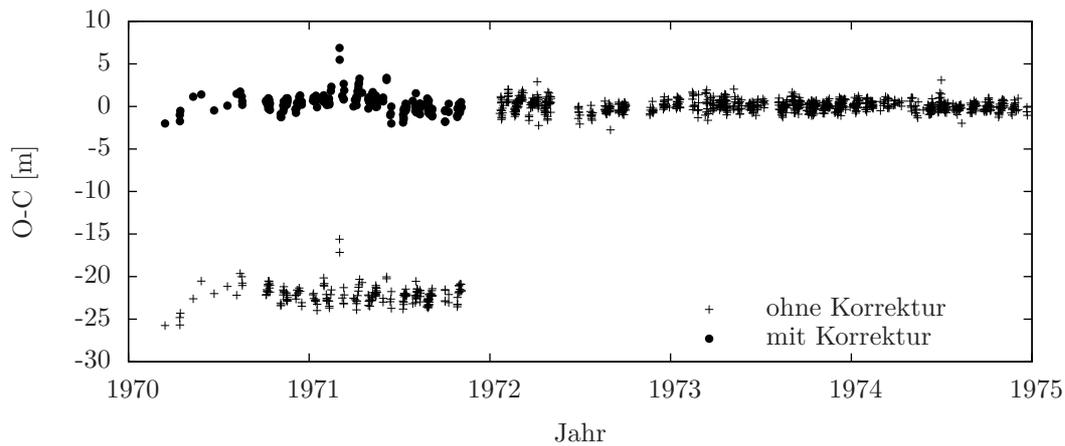


Abb. 3.1: 2-Wege-CDDIS-Residuen (observed-computed O-C) der McDonald-Station (2.7 m Teleskop) von 1970 bis 1975 ohne und mit UTC-TAI Laufzeitkorrektur der NP bis 01.01.1972.

3. Aussortieren von NP mit identischen Stations- und Reflektorcode sowie Laser-Sendezeitpunkt, mit abweichenden Werten in den meteorologischen Daten Druck, Temperatur und Luftfeuchtigkeit (3688 NP entfernt).
4. Aussortieren von NP mit identischem Sendezeitpunkt des Laserpulses (8099 NP entfernt).
5. Aussortieren von NP mit einer Abweichung von maximal 0.1 s im Sendezeitpunkt. Viele NP unterscheiden sich in der Größenordnung von 1.0×10^{-10} d im Sendezeitpunkt. Eine Ursache kann die unterschiedliche Anzahl an gespeicherten Stellen in den Ursprungs-Datenformaten sein. Alle NP mit Differenzen bis 0.1 s werden als gleiche NP betrachtet (23161 NP entfernt).
6. Aussortieren von vorläufigen NP der APOLLO-Station. In den Datensätzen des JPL und POLAC sind einige NP enthalten, die in der Zusammenstellung der APOLLO-Station fehlen [Murphy, 2016], oder eine geringfügig andere Sendezeit des Laserpulses haben. Vermutlich handelt es sich um vorläufig berechnete NP, die später nachprozessiert wurden. Der Gesamtdatensatz enthält jetzt alle NP von der APOLLO-Website bis zum 17.11.2014 (166 NP entfernt).
7. Bereinigen von offensichtlichen Fehlern in den NP. Korrigiert wurden beispielsweise 0-Werte in der Laufzeitgenauigkeit, dem Luftdruck und der Luftfeuchtigkeit durch mittlere Werte der umliegenden NP der selben Station.
8. Aussortieren von NP mit einem Unterschied von weniger als 180 s in der Sendezeit des Laserpulses. Die typische Beobachtungszeit zur Erzeugung eines NP liegt bei mehreren Minuten, die den zeitlichen Abstand aufeinanderfolgender NP einer Station bestimmen. Am Beispiel der McDonald-Station beträgt der Abstand für einen Großteil der Messungen mehr als 400 s (Abbildung 3.2). Die teilweise wesentlich geringeren zeitlichen Abstände wurden vermutlich durch nachprozessierte NP hervorgerufen, bei denen der Sendezeitpunkt verändert wurde. In den Datensätzen sind beide enthalten, wobei es nicht möglich ist, den „aktuelleren“ NP vom „veralteten“ zu unterscheiden, da die Angabe einer Releasenummer erst im neuen CRD-Format möglich ist. Um möglichst wenige NP aus den gleichen Rohmessungen in den Gesamtdatensatz zu übernehmen, wurde eine Grenze von 180 s für den zeitlichen Abstand aufeinanderfolgender NP festgelegt. Dies entspricht auch der Vorgehensweise des POLAC für diese Daten [Bouquillon, persönliche Kommunikation, 2013]. Zur Auswahl der NP wurde der gesamte Datensatz mit dem erweiterten Auswertemodell dieser Arbeit (Kapitel 4) analysiert. Die NP mit den jeweils kleineren Residuen wurden im Datensatz behalten. NP der APOLLO-Station wurden nicht entfernt, da APOLLO die instrumentellen Möglichkeiten besitzt auch in kürzeren Ab-

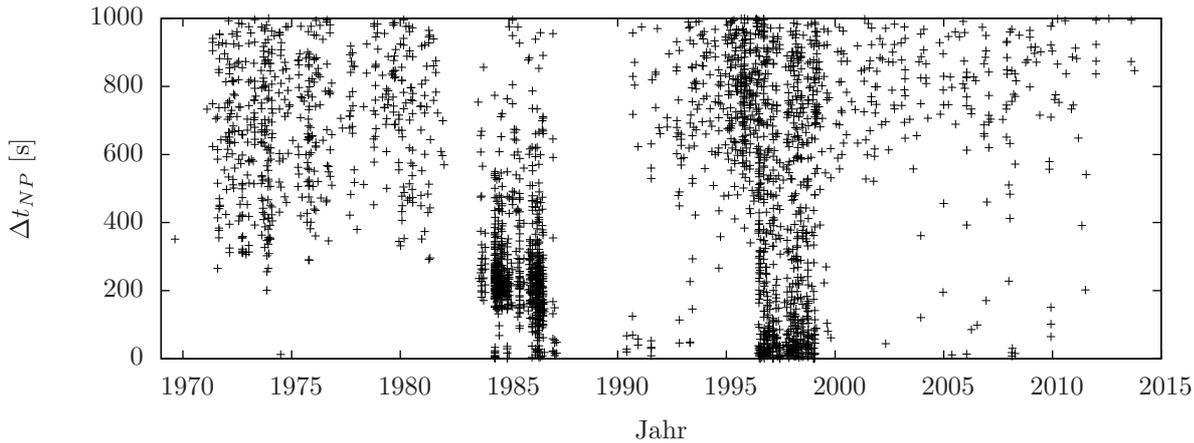


Abb. 3.2: Differenz der Sendezeitpunkte Δt_{NP} zwischen zwei aufeinanderfolgenden NP am Beispiel der McDonald-Station.

Tab. 3.2: NP-Verteilung auf die Reflektoren für den verwendeten Datensatz von 1970 bis Anfang 2015.

Reflektor	Anzahl der NP	relativer Anteil
A11	2203	10.5 %
A14	2162	10.4 %
A15	15707	75.3 %
L1	190	0.9 %
L2	594	2.9 %

ständen genügend Photonen für die Erzeugung voneinander unabhängiger NP zu detektieren (663 NP entfernt).

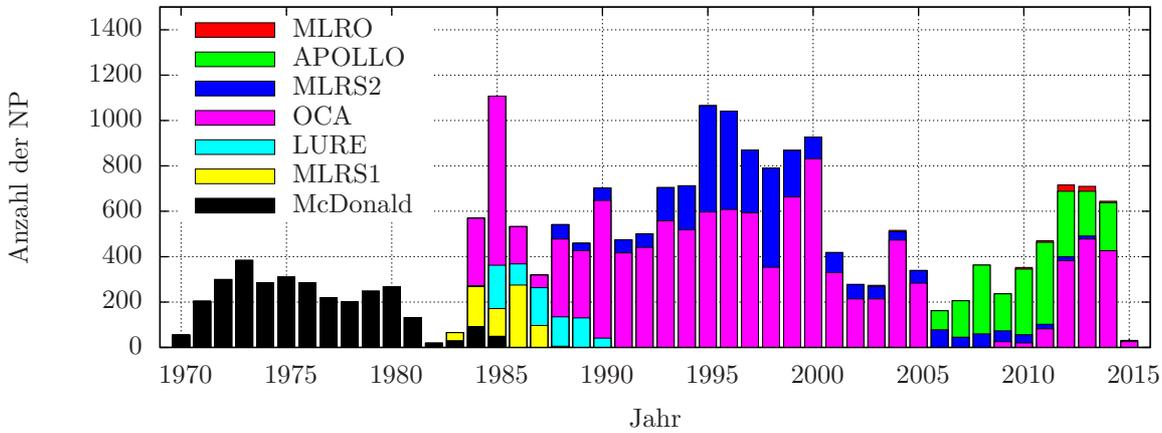
In den Daten verbleiben 22511 NP von 1970 bis Anfang 2015, die in einer Vorauswertung auf Ausreißer untersucht wurden. Übersteigen die Residuen der NP einen definierten Schwellwert, wird der NP als Ausreißer entfernt. Der Schwellwert wird an die Messgenauigkeit der Observatorien angepasst und liegt bei einigen Dezimetern. Als weiteres Kriterium werden die standardisierten Verbesserungen der Beobachtungen herangezogen [Niemeier, 2002]. Übersteigt der Wert der Verbesserung eine, ebenfalls stationsabhängige, Grenze wird der NP entfernt. Insgesamt wurden 1655 NP als Ausreißer detektiert, sodass der endgültige Datensatz 20856 NP enthält und für die Berechnungen in den Kapiteln 5 und 6 verwendet wird.

Die Verteilung auf die angemessenen Reflektoren ist in Tabelle 3.2 dargestellt. Durch seine Größe weist der A15-Reflektor das stärkste Signal aller Reflektoren auf und wurde daher für rund 75 % aller bisherigen LLR-Messungen als „leichtestes Ziel“ verwendet. Die starke Dominanz dieses Reflektors wird in den nächsten Jahren reduziert, da die modernen Stationen APOLLO und OCA die messtechnischen Voraussetzungen erfüllen, um routinemäßig NP zu allen Reflektoren zu bestimmen. Tabelle 3.3 fasst die Verteilung der NP auf die einzelnen Stationen zusammen. Der Hauptteil der Messungen wurde von den Stationen OCA, den drei McDonald-Stationen und APOLLO erbracht. Die jährliche Verteilung der NP in Abbildung 3.3 zeigt, dass seit 1990 die Messungen von der Station OCA dominieren und ab 2006 mit APOLLO und OCA hauptsächlich zwei Stationen LLR-Messungen durchführen.

Die Laufzeitgenauigkeiten σ_{NP} in den NP wurden auf Plausibilität innerhalb der Stationszeitreihe und im Vergleich zwischen den Stationen überprüft. Zum Beispiel wurden zu geringe Genauigkeitsangaben einzelner Stationen korrigiert oder die von der APOLLO-Station mitgelieferten Genauigkeitsanpassungen für verschiedene Messzeiträume berücksichtigt. Tabelle 3.4 fasst die implementierten Korrekturen zusammen.

Tab. 3.3: NP-Verteilung auf die Observatorien für den verwendeten Datensatz von 1970 bis Anfang 2015.

Observatorium	Zeitraum	Anzahl der NP
McDonald	1970 - 1985	3071
MLRS1	1983 - 1988	710
MLRS2	1988 - 2013	3133
LURE	1984 - 1990	755
OCA	1984 - 2015	11039
APOLLO	2006 - 2014	2058
WLRS	1994 - 1996	4
MLRO	2003 - 2015	86

**Abb. 3.3:** Histogramm der NP von 1970 bis Anfang 2015 mit Aufteilung nach Observatorien. Die 4 NP von WLRS sind nicht dargestellt.**Tab. 3.4:** Anpassung der Laufzeitgenauigkeiten σ_{NP} der NP in der Auswertung.

Station	Zeitraum [JD _{LLR}]	Genauigkeitsanpassung über
MLRS1	5548.0 - 7188.0	$\sigma = \sigma_{NP} + 0.15 \text{ ns}$
MLRS2	7220.0 - 11350.0	$\sigma = 1.5\sigma_{NP} + 0.1 \text{ ns}$
	11350.0 - 17035.0	$\sigma = \sqrt{\sigma_{NP}^2 + (0.1 \text{ ns})^2}$
LURE	6018.0 - 8134.0	$\sigma = \sigma_{NP} + 0.15 \text{ ns}$
	9125.0 - 11172.5	$\sigma = 2.0\sigma_{NP} - 0.05 \text{ ns}$
OCA	11172.5 - 11431.5	$\sigma = \sigma_{NP} + 0.1 \text{ ns}$
	11431.5 - 17035.0	$\sigma = 0.5\sigma_{NP}$
APOLLO	13832.0 - 15501.0	$\sigma = \sqrt{\sigma_{NP}^2 + (0.017 \text{ ns})^2}$
	15501.0 - 16024.8	$\sigma = \sqrt{\sigma_{NP}^2 + (0.060 \text{ ns})^2}$
	16024.8 - 17035.0	$\sigma = \sqrt{\sigma_{NP}^2 + (0.020 \text{ ns})^2}$

4 Erweiterung der Analysesoftware LUNAR

In diesem Kapitel werden die Änderungen im funktionalen Modell der LLR-Analysesoftware beschrieben. Kapitel 4.1 enthält Aktualisierungen des Modells des Mondschwerefeldes und der atmosphärischen Laufzeitverzögerung sowie der Gezeiteneffekte auf die Reflektorkoordinaten, die Integrationsgenauigkeit und planetare Effekte auf die Translationsbewegung der Erde. Die Erweiterung des Modells der auf den Mond wirkenden gravitativen Kräfte von Sonne und Planeten wird in Kapitel 4.2 beschrieben und die Effekte auf die Mondephemeride untersucht. Das Modell der Mondrotation wird in Kapitel 4.3 erweitert, um die innere Struktur bestehend aus einem festen Mantel und flüssigen Kernbereich abzubilden. Der dem Auswerteprogramm hinzugefügte Simulationsteil ist in Kapitel 4.4 beschrieben.

4.1 Allgemeine Änderungen

4.1.1 Mondschwerefeld

Das in der Ephemeridenrechnung verwendete Mondschwerefeld wurde mit einer Lösung der GRAIL-Mission aktualisiert [Konopliv u. a., 2013]. Die Übersicht über die genutzten Potentialkoeffizienten befindet sich in Anhang A.3. Die in der Berechnung verwendeten unnormierten Potentialkoeffizienten sind im HAS des Mondes gegeben und es gilt $C_{21} = S_{21} = S_{22} = 0$. Weiterhin liegen die Koeffizienten vom Grad 2 im tide-free System vor. Die gezeitenbedingten Variationen der Grad-2 Koeffizienten werden in Kapitel 4.3 beschrieben und in jedem Integrationsschritt der Berechnung zu den tide-free Werten addiert.

Um einen bessere Anpassung des Modells an die Messwerte zu erhalten, werden die Koeffizienten C_{22} , C_{32} , C_{33} und S_{32} aus LLR-Daten bestimmt. Besonders die Modellierung der Mondrotation wird durch die Schätzung der Koeffizienten von Grad 3 verbessert und deutet darauf hin, dass künftig weitere Effekte, zum Beispiel in der Beschreibung der Dissipationseffekte im Mondinneren, berücksichtigt werden müssen. Die Ergebnisse der geschätzten Potentialkoeffizienten sind in Tabelle 5.20 dargestellt.

4.1.2 Modell der atmosphärischen Laufzeitverzögerung

Bisher wurde in der LLR-Auswertung mit LUNAR das Modell der atmosphärischen Laufzeitverzögerung nach Marini und Murray [1973] verwendet. In dieser Arbeit wurde das Modell durch die Zenitverzögerung nach Mendes und Pavlis [2004] und die Elevationsabhängigkeit der Laufzeitverzögerung nach Mendes u. a. [2002] ersetzt. Die Verwendung beider Modelle ist konsistent mit den IERS Conventions 2010 und entspricht dem Standardmodell für die Analyse von Laserdaten des ILRS. Das Modell der Zenitverzögerung hat den Vorteil, dass es gleichermaßen für Beobachtungen im grünen Spektralbereich wie auch für neue Beobachtungen im nahen Infrarotbereich verwendet werden kann.

Für die Zenitverzögerung wurde in dieser Arbeit die FORTRAN77 Routine FCUL_ZD_HPA.F [AtmoZ] des IERS Conventions Centers als Subroutine `meteoZ` integriert. Die benötigten Werte für die ellipsoidische Länge und Breite des Observatoriums, Luftdruck und Laserwellenlänge liegen im Programm bereits vor. Der Partialdruck des Wasserdampfes $p_{\text{H}_2\text{O}}$ wird aus der Temperatur T

Tab. 4.1: Geoidhöhen N an der Position der Observatorien.

Observatorium	N [m]
McDonald	-22.07
MLRS1	-22.08
MLRS2	-22.08
LURE	17.93
OCA	51.06
APOLLO	-21.49
WLRS	46.82
MLRO	45.50

in K, dem Luftdruck p in hPa und der relativen Luftfeuchtigkeit R_h in % über

$$p_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{R_h}{100} p_s f_w \quad (4.1)$$

mit dem Sättigungsdampfdruck

$$p_s = 0.01 e^{1.2378847 \times 10^{-5} T^2 - 1.9121316 \times 10^{-2} T + 33.93711047 - 6343.1645 T^{-1}} \quad (4.2)$$

und dem Verstärkungsfaktor

$$f_w = 1.00062 + 3.14 \times 10^{-6} p + 5.6 \times 10^{-7} (T - 273.15 \text{ K})^2 \quad (4.3)$$

berechnet [Giacomo, 1982; Davis, 1992].

Für die Elevationsabhängigkeit wurde die ebenfalls in FORTRAN77 bereitgestellte Mappingfunktion FCUL_a.f [AtmoMap] in dieser Arbeit als Subroutine `mapfac` integriert. Diese berechnet einen Skalierungsfaktor, mit der die Zenitverzögerung multipliziert wird. Die Eingabewerte für die Stationsbreite, Lufttemperatur und Elevation des Mondes liegen im Programm bereits vor. Die benötigten orthometrischen Stationshöhen H können aus den ellipsoidischen Höhen h und der Geoidhöhe N über

$$H = h - N \quad (4.4)$$

ermittelt werden [Torge und Müller, 2012]. Die Geoidhöhen der einzelnen Stationen für das Earth Gravitational Model (EGM), Version 2008, (Tabelle 4.1) wurden mit Hilfe der von der National Geospatial-Intelligence Agency zur Verfügung gestellten Programme bestimmt [NGA-EGM2008].

In Abbildung 4.1 ist die Differenz in der atmosphärischen Laufzeitkorrektur zum früheren Modell von Marini und Murray für einen Teil der Daten von MLRS2 dargestellt. Der Offset zwischen den Modellen liegt in der erwarteten Größenordnung von rund 2 mm [Mendes und Pavlis, 2004]. Obwohl die Einzelbeobachtungen teilweise um mehrere Millimeter im Vergleich zum Marini-und-Murray-Modell korrigiert werden, ändern sich die Residuen in der konvergierten Lösung nur im sub-mm-Bereich.

4.1.3 Gezeitenwirkung auf die Reflektorkoordinaten

Der Mond wird, genau wie die Erde, durch Gezeiteneffekte deformiert. Die resultierenden Änderungen in den Reflektorkoordinaten wurden bislang in LUNAR nicht berücksichtigt, sodass die geschätzten Koordinaten eine mittlere Position darstellten. In dieser Arbeit wird die vereinfachte Modellierung der Gezeitendeformation vom Grad 2 nach den IERS Conventions 2010, Gleichung (7.5) [Petit und Luzum, 2010], auf den Mond angepasst. Die Verschiebung $\Delta \mathbf{x}_{ref}$ eines Reflektors

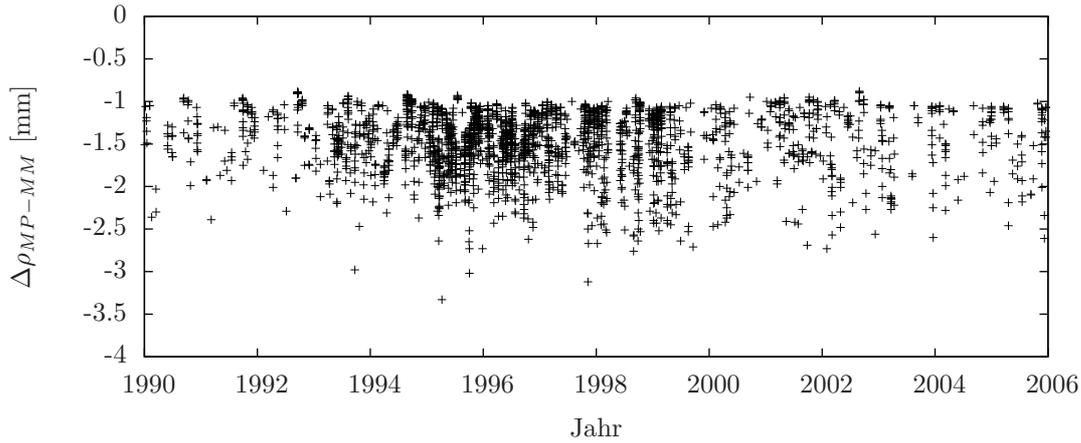


Abb. 4.1: Differenz $\Delta\rho_{MP-MM}$ der atmosphärischen Laufzeitkorrektur zwischen Mendes-und-Pavlis-Modell (MP) und Marini-und-Murray-Modell (MM), exemplarisch für die MLRS2-Station zwischen 1990 und 2006.

im selenozentrischen Referenzsystem (SRS) ergibt sich zu

$$\Delta\mathbf{x}_{Ref} = \sum_j \frac{GM_j}{GM_M} \frac{X_{Ref}^4}{X_j^3} \left\{ h_2 \mathbf{u}_{Ref} \left(\frac{3(\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_{Ref})^2 - 1}{2} \right) + 3 l_2 (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_{Ref}) [\mathbf{u}_j - (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_{Ref}) \mathbf{u}_{Ref}] \right\}, \quad (4.5)$$

mit der Lovezahl h_2 der radialen Verschiebung, der Shidazahl l_2 der tangentialen Verschiebung, dem Abstand des Reflektors vom Selenozentrum X_{Ref} , dem selenozentrischen Abstand X_j des entsprechenden gezeitenerzeugenden Körpers j und den Einheitsvektoren in Richtung Reflektor \mathbf{u}_{Ref} und gezeitenerzeugenden Körper \mathbf{u}_j im SRS. Der Wert für l_2 wird in dieser Arbeit auf dem Modellwert der DE430-Ephemeride von $l_2 = 0.0107$ festgehalten [Williams u. a., 2013, 2014].

Der größte Effekt wird durch die Gezeitenwirkung der Erde verursacht. Wird nur die radiale Komponente betrachtet ($l_2 = 0$), so ergibt sich mit dem DE430-Wert für $h_2 = 0.0476$ eine maximale Verschiebung zwischen 53 cm (Mond in Erdferne) und 74 cm (Mond in Erdnähe). Die gebundene Rotation des Mondes führt zu einer permanenten Deformation, sodass die resultierenden Variationen im Bereich von rund ± 10 cm während eines Mondumlaufs liegen. Der Effekt der Sonne ist mit einer Amplitude von 3.5 mm wesentlich geringer. Der Gezeiteneinfluss der Planeten kann unberücksichtigt bleiben, da die größte Verschiebung bei maximal $0.5 \mu\text{m}$ liegt und durch Venus hervorgerufen wird. Die bisher geschätzten Reflektorkoordinaten repräsentierten einen Mittelwert der gezeitenbedingten Deformation mit einer umodellierten Variation im Bereich weniger Zentimeter.

Die Reaktion der Mondoberfläche erfolgt nicht augenblicklich zum Zeitpunkt der angreifenden Kraft, sondern zeitverzögert um einen Betrag τ_M . Mit

$$\hat{\mathbf{u}}_j = \mathbf{u}_j(t - \tau_M) \quad (4.6)$$

ändert sich Gleichung (4.5) zu

$$\Delta\hat{\mathbf{x}}_{Ref} = \sum_j \frac{GM_j}{GM_M} \frac{X_{Ref}^4}{\hat{X}_j^3} \left\{ h_2 \mathbf{u}_{Ref} \left(\frac{3(\hat{\mathbf{u}}_j \cdot \mathbf{u}_{Ref})^2 - 1}{2} \right) + 3 l_2 (\hat{\mathbf{u}}_j \cdot \mathbf{u}_{Ref}) [\hat{\mathbf{u}}_j - (\hat{\mathbf{u}}_j \cdot \mathbf{u}_{Ref}) \mathbf{u}_{Ref}] \right\}. \quad (4.7)$$

Abbildung 4.2 zeigt den Unterschied zwischen dem zeitverzögerten Eintritt der Gezeitenwirkung und der instantanen Wirkung auf die Reflektorkoordinaten $\Delta\hat{\mathbf{x}}_{Ref} - \Delta\mathbf{x}_{Ref}$ am Beispiel des A14-Reflektors bei einer Verzögerung von $\tau_M = 0.1$ d [Folkner u. a., 2014]. Dargestellt ist die Differenz in lokal radialer und tangentialer Richtung sowie die in der LLR-Analyse wirksamen Entfernungsan-

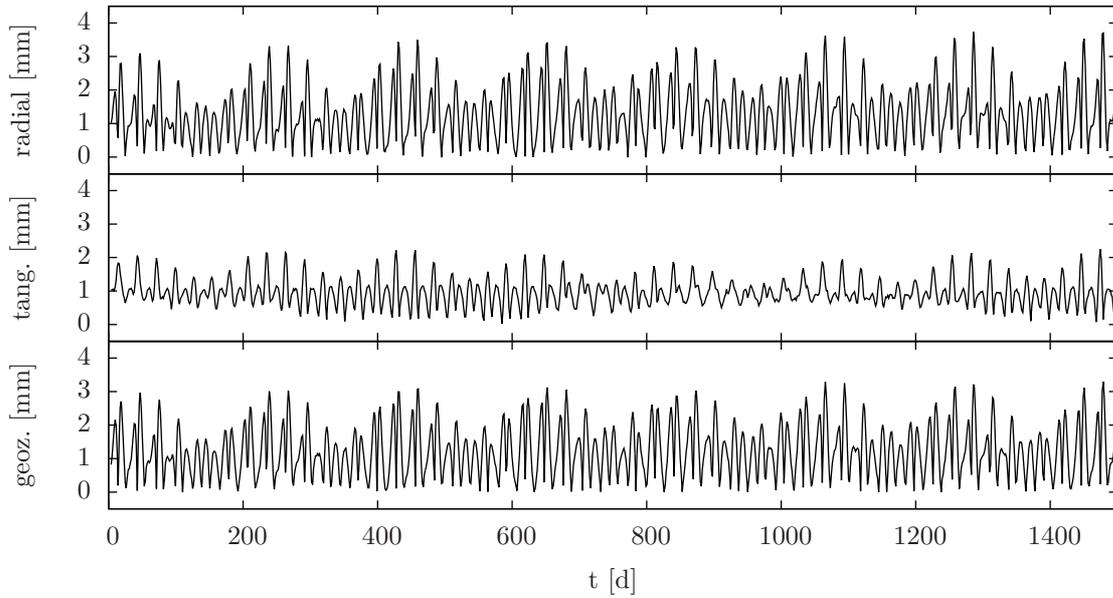


Abb. 4.2: Betrag der Differenz $\Delta\hat{\mathbf{x}}_{Ref} - \Delta\mathbf{x}_{Ref}$ der gezeitenbedingten Änderung der A14-Reflektorkoordinaten in lokal radialer und tangentialer Richtung sowie die Entfernungsänderung zum Geozentrum über einen Zeitraum von 1500 Tagen.

derung zum Geozentrum über einen Zeitraum von 1500 Tagen. Die Unterschiede im Abstand zum Geozentrum erreichen in diesem Beispiel Werte von teilweise über 3 mm. Für künftige Messungen im mm-Bereich ist es daher notwendig, die Reflektorkoordinaten nicht nur um die Gezeiten des festen Mondes zu korrigieren, sondern auch die verzögerte Reaktion des Mondes auf die Gezeitenkräfte in die Analyse mit einzubeziehen.

Aus Gleichung (4.7) berechnet sich die partielle Ableitung der gemessenen Strecke ϱ nach der Lovezahl h_2 zu

$$\frac{\partial \varrho}{\partial h_2} = \frac{\varrho}{\varrho} \frac{\partial \mathbf{x}_{Ref}}{\partial h_2}, \text{ mit} \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}_{Ref}}{\partial h_2} = \mathbf{D}_M^T \sum_j \frac{GM_j}{GM_M} \frac{X_{Ref}^4}{\hat{X}_j^3} \mathbf{u}_{Ref} \left(\frac{3(\hat{\mathbf{u}}_j \cdot \mathbf{u}_{Ref})^2 - 1}{2} \right). \quad (4.9)$$

In der Analyse wird der vollständige Anteil der Gezeiten des festen Mondes an die Reflektorkoordinaten angebracht. Damit werden in dieser Arbeit keine mittleren Koordinaten, sondern tide-free Koordinaten geschätzt.

In Tabelle 4.2 sind, stellvertretend für alle Reflektoren, die erzielten 1σ -Genauigkeiten der Position des A15-Reflektors und die Verbesserungsquadratsumme $(\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v})^1$ nach der Ausgleichung für die alte und neue Programmversion dargestellt. Im Fall $\tau_M = 0$ wird die Deformation durch die Gezeiten direkt zum Zeitpunkt der angreifenden Kräfte berechnet, bei $\tau_M \neq 0$ wird eine zeitliche Verzögerung von 0.1 d berücksichtigt. Die verbesserte Modellierung ist anhand der verringerten Verbesserungsquadratsumme im neuen Programm zu erkennen. Die Berücksichtigung von τ_M in der Berechnung der Reflektorkoordinaten führt zu einer weiteren Verbesserung des Modells. Die Genauigkeit der Reflektorkoordinate nimmt dagegen in der neuen Version ab. Durch die Schätzung von h_2 wird die Reflektorkoordinate durch einen weiteren, ebenfalls unsicheren, Parameter beeinflusst, sodass die Genauigkeit der Koordinate verringert wird. Umgekehrt entspricht die fehlende

¹Der $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ -Wert dient als relatives Maß für die Güte der Modellierung und darf nicht beliebig innerhalb dieser Arbeit verglichen werden, da die Ergebnisse aus verschiedenen Entwicklungsstufen der Arbeit stammen. Die Anpassung der Gewichtsmatrix \mathbf{P} (Kapitel 3) im Vergleich zur vorherigen Version führte zum Beispiel zu größeren Änderungen des $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ -Wertes, ohne dass das Modell geändert wurde.

Tab. 4.2: 1σ -Genauigkeiten der Apollo 15-Reflektorkoordinaten (x , y , z und die 3D-Gesamtgenauigkeit) und Verbesserungsquadratsumme $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ nach der Ausgleichung vor der Schätzung der lunaren Lovezahl h_2 (alte Programmversion) und mit h_2 -Schätzung (neue Version dieser Arbeit) unter Berücksichtigung der zeitverzögerten Reaktion des Mondes auf äußere Kräfte über τ_M .

Programmversion	σ_x [cm]	σ_y [cm]	σ_z [cm]	σ_{3D} [cm]	$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$
alt	7.18	2.81	3.75	8.57	64503
neu, $\tau_M = 0$	8.76	2.74	4.39	10.17	60131
neu, $\tau_M \neq 0$	8.71	2.73	4.38	10.12	60045

Tab. 4.3: Maximaler Effekt der Integrationstoleranz $\epsilon = \epsilon_{abs} = \epsilon_{rel}$ auf die geozentrische Mondposition $\Delta X_{EM} = \sqrt{\Delta x_{EM}^2 + \Delta y_{EM}^2 + \Delta z_{EM}^2}$ und auf die mit dem Mondradius R_M multiplizierten Eulerwinkel ψ_{R_M} , θ_{R_M} , φ_{R_M} für 46 Jahre und 100 Jahre integrierter Zeit. Die Differenzen werden jeweils zur vorhergehenden Lösung mit der um Faktor 10 größeren Fehlertoleranz gebildet und sind in mm angegeben. In der letzten Spalte ist die benötigte Rechenzeit pro integriertem Jahrzehnt t_{int} angegeben.

ϵ	ΔX_{46}	$\psi_{R_M 46}$	$\theta_{R_M 46}$	$\varphi_{R_M 46}$	ΔX_{100}	$\psi_{R_M 100}$	$\theta_{R_M 100}$	$\varphi_{R_M 100}$	t_{int} [min]
10^{-18}	–	–	–	–	–	–	–	–	6.5
10^{-19}	1.20	< 0.01	< 0.01	< 0.01	8.00	< 0.01	< 0.01	0.03	7.8
10^{-20}	0.10	< 0.01	< 0.01	< 0.01	0.60	< 0.01	< 0.01	< 0.01	9.6
10^{-21}	< 0.01	< 0.01	< 0.01	< 0.01	0.05	< 0.01	< 0.01	< 0.01	11.0

Modellierung des Gezeiteneffekts in der alten Version einer Fixierung von h_2 auf Null, sodass die Unsicherheit von h_2 in der Koordinatenbestimmung wegfällt und sich die Genauigkeit erhöht.

4.1.4 Integrationsgenauigkeit

Die Integrationsgenauigkeit der Ephemeridenrechnung wird durch wählbare Fehlergrenzen, einem relativen Fehler ϵ_{rel} und einem absoluten Fehler ϵ_{abs} , gesteuert. In der bisherigen Ephemeridenrechnung wurde eine Fehlergrenze von $\epsilon = \epsilon_{rel} = \epsilon_{abs} = 10^{-18}$ genutzt. Um Fehler aus dem Integrationsprozess in den für LLR nicht signifikanten sub-mm Bereich zu verringern, wurden die Fehlertoleranzen des Integrators schrittweise verkleinert und jeweils eine neue Ephemeridenrechnung mit gleichen Anfangsbedingungen durchgeführt. Die für diese Arbeit festgelegte Fehlertoleranz ist erreicht, wenn in aufeinanderfolgenden Ephemeriden die auf die Mondoberfläche umgerechneten Eulerwinkel und die geozentrische Mondposition um weniger als 0.1 mm voneinander abweichen. Tabelle 4.3 enthält die Ergebnisse der Mondephemeride über eine integrierte Zeitspanne von 46 und 100 Jahren sowie die Rechenzeit pro integriertem Jahrzehnt unter Berücksichtigung von 14 Körpern des Sonnensystems (Sonne, Planeten, Mond, Pluto, 3 Asteroiden). Für die Auswertung der 46-jährigen LLR-Datenreihe sind die berechneten Eulerwinkel bereits bei einer Toleranz von $\epsilon = 10^{-18}$ ausreichend, das heißt mit einer Präzision von 0.1 mm auf der Mondoberfläche, bestimmt. Um auch die Position des Mondes mit der geforderten Präzision zu berechnen, muss ϵ auf 10^{-20} verringert werden. Die benötigte Rechenzeit steigt dadurch um etwa 50 % an. Diese Fehlertoleranz wird für die Berechnung der Ephemeriden in dieser Arbeit verwendet.

Mit zunehmender Länge des integrierten Zeitraumes steigt der Fehler durch eine zu große Toleranz überproportional an. Für die Analyse von zukünftigen längeren LLR-Datenreihen wird es notwendig sein, ϵ weiter zu verringern. Ebenso muss bei der Erstellung von präzisen Langzeitephemeriden die Toleranz angepasst werden. Bei einer Integration über einen Zeitraum von 1000 Jahren muss ϵ auf 10^{-23} verringert werden, um eine Präzision von 0.1 mm in der geozentrischen Position des Mondes einzuhalten. Die Rechenzeit erhöht sich in diesem Fall um weitere 50 % pro integriertem Jahrzehnt im Vergleich zur Berechnung mit $\epsilon = 10^{-20}$.

Tab. 4.4: Maximaler Effekt der gravitativen Wechselwirkung der Planeten mit dem C_{20} -Term des Erdschwerefeldes auf die baryzentrische Erdposition $\Delta X_E = \sqrt{\Delta x_E^2 + \Delta y_E^2 + \Delta z_E^2}$ und auf den Erde-Mond-Abstand ΔX_{EM} nach einer integrierten Zeit von 46 Jahren.

	Merkur	Venus	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	kombiniert
ΔX_E [mm]	0.07	8.13	0.16	0.38	0.01	< 0.01	7.98
ΔX_{EM} [mm]	0.02	0.19	0.01	0.02	< 0.01	< 0.01	0.17

4.1.5 Planetare Wechselwirkung mit der Erdabplattung

In der Ephemeridenrechnung wird die Translation der Erde aus den Bewegungsgleichungen und zusätzlich angreifenden äußeren Kräften berechnet (Kapitel 2.2.1). Um die Genauigkeit der Erde-Mond-Distanz weiter zu verfeinern, wurde das Modell der Erdtranslation um Effekte erweitert, die sich aus der gravitativen Wirkung der Planeten und der Sonne mit dem Erdgravitationsfeld ergeben. Von diesen Körpern aus betrachtet, mitteln sich die tesseralen und sektoriellen Anteile durch die Rotation der Erde heraus und der größte Effekt resultiert aus der Kopplung mit dem zonalen Anteil des Erdgravitationsfeldes.

Tabelle 4.4 zeigt die Effekte der einzelnen Planeten mit dem C_{20} -Term der Erde auf die baryzentrische Position der Erde und den dadurch indirekt beeinflussten Erde-Mond-Abstand über einen Zeitraum von 46 Jahren. Der größte Effekt in der Größenordnung einiger Millimeter wird durch die Wechselwirkung mit Venus hervorgerufen. Der Einfluss der anderen Planeten ist mit maximal 0.38 mm in der Erdposition, hervorgerufen durch die C_{20} -Wechselwirkung mit Jupiter, wesentlich kleiner, nimmt aber bei zeitlich längeren Ephemeridenstücken zu. Die C_{20} -Wechselwirkung mit einzelnen Körpern des Asteroidengürtels ist durch die geringen Massen der Asteroiden nochmals kleiner als der Einfluss der Planeten. Das massereichste Objekt im Asteroidengürtel, Ceres, beeinflusst die Erdposition und Erde-Mond-Entfernung um weniger als 0.01 mm. Im Zuge der Erstellung einer neuen Ephemeride des Sonnensystems am IfE werden mehr Asteroiden als bisher berücksichtigt [Mai und Müller, 2014]. Damit könnte die Wechselwirkung mit dem C_{20} -Term auf die Erdposition und Mondentfernung einen für LLR signifikanten Betrag erreichen und sollte in einer künftigen Studie untersucht werden.

In dieser Arbeit wird die bisherige Ephemeridenrechnung um die Wirkung von Venus mit dem C_{20} -Term des Erdschwerefeldes auf die Translation der Erde erweitert. Die Berücksichtigung des C_{30} -Termes oder noch höherer Grade des Erdschwerefeldes ist nicht notwendig, da die zusätzlichen Effekte auf die Erdposition auf unter 0.02 mm (Wechselwirkung mit der Sonne) begrenzt sind.

4.2 Wirkung äußerer gravitativer Kräfte auf den Mond

Für eine präzise Mondephemeride im sub-mm Bereich über den Zeitraum der bisherigen und auch zukünftigen LLR-Analyse, werden die in der Ephemeridenrechnung verwendeten Modelle der am Mond angreifenden äußeren Kräfte verfeinert und um fehlende Teile ergänzt. Kapitel 2.2.1 beschreibt die bisher genutzte Modellierung der auf den Mond wirkenden äußeren Kräfte in der Ephemeridenrechnung.

4.2.1 Planetare und solare Wechselwirkung mit dem Mondschwerefeld

Die Wechselwirkung des Schwerefeldes des Mondes mit externen Massen beeinflusst die lunare Translation und Rotation (Kapitel 4.2.3). Für eine Präzision von 0.1 mm in Position und Rotation müssen neben den bisher betrachteten Effekten von Erde und Sonne auch weitere Körper im Sonnensystem berücksichtigt werden. Das Ephemeridenprogramm wurde erweitert, um die Wechselwirkung zwischen den Planeten und größten Asteroiden mit dem Mondschwerefeld zu modellieren.

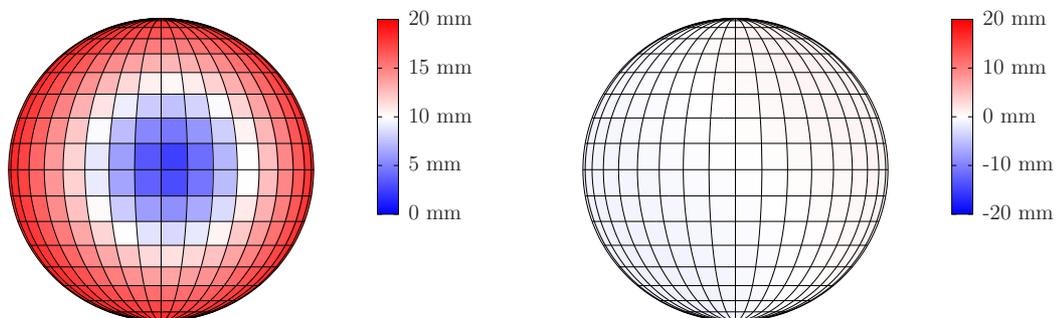
Im Folgenden wird die Auswirkung der einzelnen Körper auf die Position und Rotation des Mondes untersucht und jeweils eine eigene Ephemeridenrechnung über einen Zeitraum von 46 Jahren mit gleichen Startwerten durchgeführt. Um den kompletten Effekt der Änderungen auf die Ephemeride zu erhalten, erfolgt keine Schätzung der Startwerte mit anschließender erneuter Integration. In diesem Fall wären die Differenzen zwischen den Ephemeriden wesentlich geringer, da sich die Änderungen auf die mitgeschätzten Parameter verteilen würden.

Der Effekt auf die Translation wird über die Differenz der geozentrischen Mondposition ΔX_{EM} dargestellt. Der Effekt auf die Rotation führt zu kleinen Änderungen in den Eulerwinkeln des Mondes. Das führt zu Änderungen in den ins Ekliptiksystem transformierten Koordinaten von Punkten auf dem Mond. Um den maximalen Effekt aus der veränderten Mondrotation zu bestimmen, wurde zu jedem Zeitpunkt der Ephemeridenausgabe (alle 0.3 Tage) ein Testnetz von 325 Punkten auf der Mondvorderseite (Gitterpunkte alle 10 Grad Länge und Breite mit mittlerem Mondradius R_M) in das Ekliptiksystem transformiert und der Abstand ΔX_{Eul} zwischen korrespondierenden Punkten berechnet. Der maximale Abstand $\Delta X_{Eul,max}$ über alle Ausgabezeitpunkte der 46-jährigen Ephemeride wird als Maß für den Effekt auf die Rotation betrachtet. Abbildungen 4.3 und 4.4 zeigen den Effekt von Venus auf ΔX_{Eul} und auf die Änderung des Geozentrumsabstandes der Testnetzpunkte zum Zeitpunkt von $\Delta X_{Eul,max}$ sowie zum Zeitpunkt der maximalen Änderung des Geozentrumsabstandes. Das Maximum von $\Delta X_{Eul,max}$ tritt nicht gleichzeitig mit der maximalen Änderung des Geozentrumsabstandes der Netzpunkte auf. Der Betrag beider Größen ist aber nahezu gleich, sodass $\Delta X_{Eul,max}$ auch die maximal mögliche Änderung der Entfernung zwischen Station und Reflektor in den LLR-Messungen darstellt.

Die bisherige Modellierung der Kräfte zwischen der Sonne als Punktmasse und dem Mondschwerefeld bis Grad und Ordnung 2 ist für die geforderte Präzision von 0.1 mm nicht ausreichend. Berücksichtigt man das Schwerefeld bis zu Grad und Ordnung 3 ergeben sich zusätzliche Variationen von bis zu 0.31 mm in der Translation des Mondes und 0.64 mm in der Rotationskomponente. Die Kopplung mit einer höheren Schwerefeldentwicklung des Mondes führt zu vernachlässigbar kleinen Effekten unter 0.1 mm und muss nicht berücksichtigt werden.

Betrachtet man die Beträge der Gravitationsfeldstärken $g = GMr^{-2}$ der Planeten an der Position des Mondes, zeigt sich, dass der größte gravitative Einfluss auf den Mond von Venus und Jupiter hervorgerufen wird (Abbildung 4.5). Die Effekte der Planeten mit dem Mondschwerefeld bis Grad und Ordnung 2 sind in Tabelle 4.5 zusammengefasst.

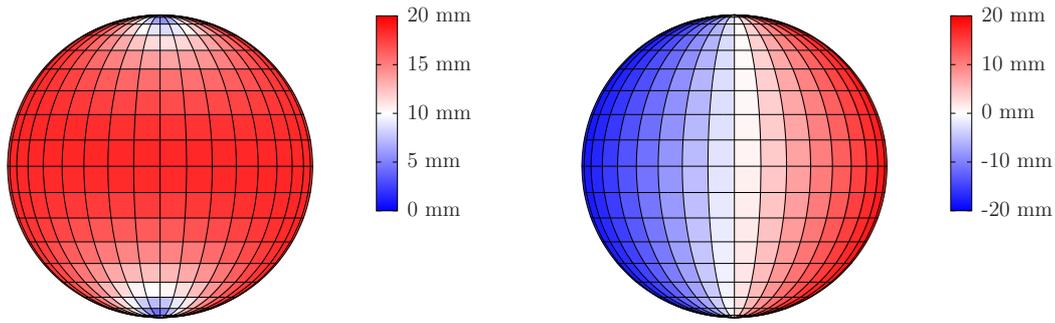
Die Translation des Mondes ist von der planetaren Wechselwirkung kaum betroffen. Einzig die zusätzliche Störung durch Jupiter erzeugt mit 0.14 mm eine Änderung der Erde-Mond-Distanz, die



(a) Betrag der Koordinatenänderung

(b) Änderung des Geozentrumsabstands

Abb. 4.3: Betrag der Änderung der ins Ekliptiksystem transformierten Koordinaten des lunaren Testnetzes und Differenz des Geozentrumsabstandes der Netzpunkte zum Zeitpunkt der maximalen Koordinatenänderung durch den gravitativen Effekt der Venus mit dem lunaren Gravitationsfeld von Grad und Ordnung 2.



(a) Betrag der Koordinatenänderung

(b) Änderung des Geozentrumsabstands

Abb. 4.4: Wie Abbildung 4.3 zum Zeitpunkt der maximalen Änderung des Geozentrumsabstands der Testnetzpunkte.

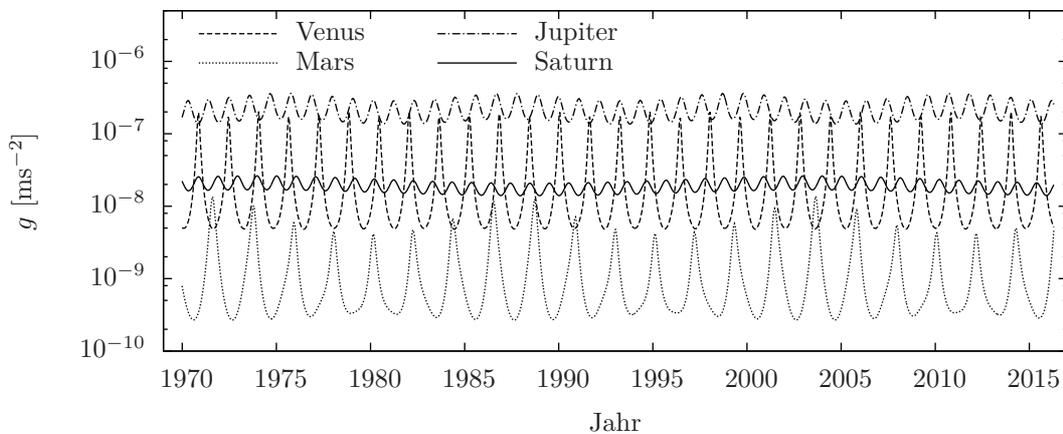


Abb. 4.5: Betrag der Gravitationsfeldstärke g der Planeten an der Position des Mondes

den geforderten Präzisionsbereich übersteigt. Die Rotation des Mondes wird stärker beeinflusst. Der größte Beitrag des auf die Mondoberfläche umgerechneten Effekts beträgt etwa 19 mm und wird von Venus hervorgerufen. Abbildung 4.6 zeigt die Wirkung von Venus auf die drei mit R_M multiplizierten Eulerwinkel sowie den maximalen ekliptikalen Koordinatenabstand ΔX_{Eul} zwischen korrespondierenden Punkten des lunaren Testnetzes zu jedem Ausgabezeitpunkt der Ephemeridenrechnung.

Durch die geringe Neigung des Mondäquators zur Ekliptik liegen die Eulerwinkel ψ und φ sowie deren Differenzen $\Delta\psi$ und $\Delta\varphi$ annähernd in einer Ebene, sodass beide Differenzen in erster Näherung addiert werden können. Die Einzelwerte für $\Delta\psi$ und $\Delta\varphi$ betragen im betrachteten Zeitraum bis zu 600 mm, jedoch mit jeweils unterschiedlichem Vorzeichen. Die Summe beider Differenzwinkel ($\Delta\psi + \Delta\varphi$) liegt im betrachteten Zeitraum im Bereich von ± 1 mm. Dieses Verhalten wird anhand der Gleichungen (2.8a) und (2.8c) verdeutlicht. Für kleine Winkel gilt $1/\sin\vartheta \approx \cot\vartheta$, diese Be-

Tab. 4.5: Maximaler Effekt der gravitativen Wechselwirkung der Planeten mit dem Grad-2 Schwerefeld des Mondes auf die geozentrische Mondposition ΔX_{EM} und Koordinatendifferenzen $\Delta X_{Eul,max}$ des ins Ekliptiksystem transformierten Testnetzes nach einer integrierten Zeit von 46 Jahren

	Merkur	Venus	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	kombiniert
ΔX_{EM} [mm]	< 0.01	0.02	< 0.01	0.14	0.01	0.02	0.14
$\Delta X_{Eul,max}$ [mm]	0.15	18.8	0.46	3.7	0.32	0.02	16.4

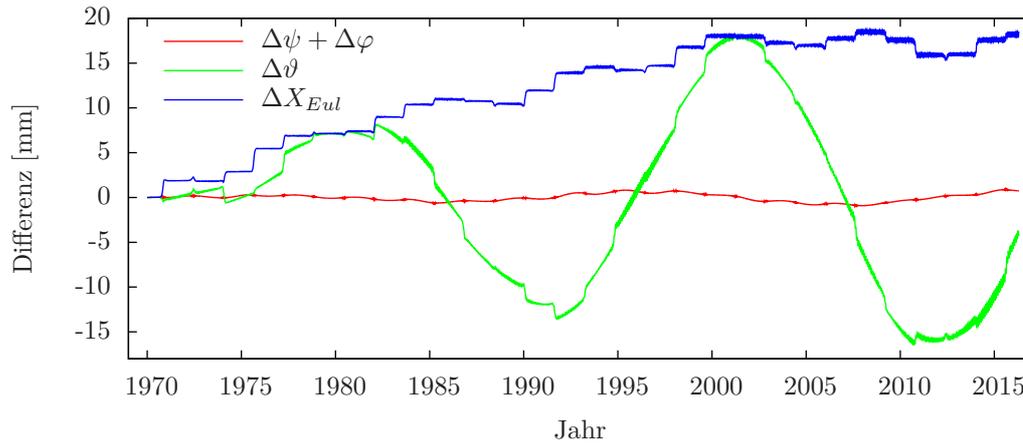


Abb. 4.6: Effekt der gravitativen Wechselwirkung von Venus mit dem Grad-2 Schwerefeld des Mondes auf die mit R_M multiplizierten Eulerwinkel $\Delta\psi + \Delta\varphi$ und $\Delta\vartheta$ sowie die Koordinatendifferenzen ΔX_{Eul} des ins Ekliptiksystem transformierten Testnetzes.

ziehung kann in erster Näherung auch für $\vartheta = 5.15^\circ$ angenommen werden. Nach Integration der Gleichungen und Differenzbildung der einzelnen Eulerwinkel folgt somit $\Delta\psi \approx -\Delta\varphi$.

Der treppenförmige Verlauf von ΔX_{Eul} und die regelmäßigen kleinen Schwankungen in $\Delta\psi + \Delta\varphi$ spiegeln die 1.6-jährige Periode der unteren Venuskonjunktion wieder. Dabei verringert sich die Distanz zwischen Venus und Erde auf etwa 41.5 Millionen km. Kein anderer Planet des Sonnensystems erreicht einen geringeren Abstand zur Erde. Die regelmäßige nahe Begegnung mit dem Erde-Mond-System führt zu einem, im Vergleich mit anderen Planeten, großen Störeinfluss auf die Rotation des Mondes.

Die bisherige Ephemeridenrechnung (Mondtranslation und -rotation) wurde um die Wirkung der Planeten Merkur bis Saturn mit dem Mondschwerefeld bis Grad und Ordnung 2 erweitert, die Planeten Uranus und Neptun sowie die drei massereichsten Körper des Asteroidengürtels können aufgrund der sehr kleinen Effekte auf die Mondephemeride vernachlässigt werden. Die Kopplung der Planeten mit einer höheren Entwicklung des Mondschwerefeldes muss ebenfalls nicht berücksichtigt werden, da die resultierenden Ephemeridenänderungen weit unter der Grenze von 0.1 mm liegen.

Die Änderungen in der Ephemeridenberechnung beeinflussen alle geschätzten Parameter in der Ausgleichung. Der Gesamteffekt auf die LLR-Analyse lässt sich anhand der Residuen nach der Ausgleichung untersuchen. Darüber hinaus kann auch die Änderung eines einzelnen Parameters betrachtet werden, wobei diese Änderungen als indirekte Anpassung an das veränderte Gesamtmodell mit allen veränderten Parametern und nicht nur direkt aufgrund der geänderten Ephemeride auftreten. Abbildung 4.7 zeigt die Differenz der Post-fit-Residuen zweier Lösungen mit dem gleichen Satz an geschätzten Parametern. Die erste Lösung vergleicht die neue Modellierung (Gravitationswirkung von Merkur bis Saturn mit Mondfeld bis Grad und Ordnung 2 sowie von Sonne mit dem Mondfeld bis Grad und Ordnung 3) mit der bisherigen Programmversion und ist mit „Mondfeld Grad 2“ bezeichnet. Die einzelnen Residuen weichen zwischen den Lösungen um bis zu 16 mm voneinander ab, schwanken aber im Mittel nahe um 0 mm. Die Differenz der Absolutwerte der Residuen $\Delta w = |w_{mit\,Planeten}| - |w_{ohne\,Planeten}|$ beträgt im Mittel über alle Normalpunkte -0.11 mm. Der negative Wert zeigt, dass durch die erweiterte Modellierung die planetaren Störeffekte besser berücksichtigt werden. Die Modellierung von Störungen der Mondephemeride durch gravitative Kopplung der Planeten mit dem Mondschwerefeld bis Grad und Ordnung 3 und der Sonne mit dem Mondschwerefeld bis Grad und Ordnung 4 hat im Vergleich zur „Mondfeld bis Grad 2“ Lösung keinen weiteren Einfluss auf die Residuen (in Abbildung 4.7 mit „Mondfeld bis Grad 3“ bezeichnet).

Die Streuung der Differenzen „Mondfeld Grad 2“ in Abbildung 4.7 zeigt, dass die bisherige Modellierung der planetaren Effekte ein zusätzliches Rauschen in die Auswertung einbringt. Um

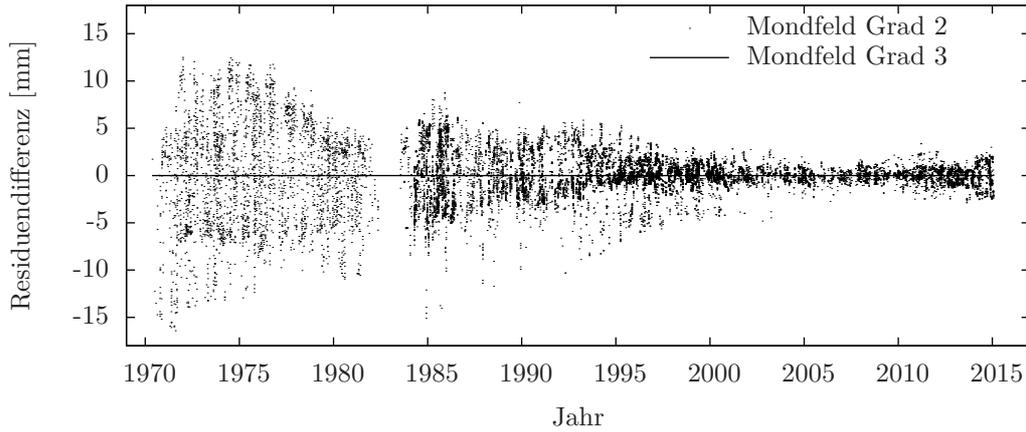


Abb. 4.7: Residuendifferenz einer LLR-Lösung mit modellierten Effekten der Planeten mit dem lunaren Gravitationsfeld bis Grad und Ordnung 2 und der bisherigen Lösung ohne erweiterte planetare Effekte („Mondfeld Grad 2“) sowie die Residuendifferenz einer Lösung mit planetaren Effekten mit dem Mondfeld bis Grad und Ordnung 3 zur Lösung mit Effekten bis Grad und Ordnung 2 („Mondfeld Grad 3“).

den Einfluss der einzelnen Messwerte auf die gesamte Auswertung zu berücksichtigen, wird der mit den Normalpunktgewichten p_i gewichtete rms (wrms) mit

$$\text{wrms} = \sqrt{\frac{\sum_i x_i^2 p_i}{\sum_i p_i}} \quad (4.10)$$

aus den Residuendifferenzen $x_i = \Delta w_i$ berechnet und beträgt 0.98 mm. Durch die verfeinerte Modellierung wird dieser Rauschanteil aus der Auswertung entfernt. Die Auswirkung der planetaren Effekte auf einen einzelnen Parameter der Ausgleichung wird anhand der mit LLR bestimmten Reflektorkoordinaten in Kapitel 5.5.2 untersucht.

4.2.2 Wechselwirkung „ausgedehnter Körper - Punktmasse“ im Erde-Mond-System

Der, im Vergleich zu den Planeten, relativ geringe Abstand zwischen Erde und Mond erfordert in der Modellierung der Gravitationswechselwirkungen die Berücksichtigung von Schwerefeldkoeffizienten über den Grad 2 hinaus. Die bisherige Standardlösung verwendet das Mondschwerefeld bis Grad und Ordnung 4, das mit der als Punktmasse angenommenen Erde in Wechselwirkung tritt. Für die Wechselwirkung mit dem Mond als Punktmasse wurde bisher das zonale Erdschwerefeld bis Grad 4 berücksichtigt. Die berechneten Kräfte werden in der Modellierung der Translation und Rotation des Mondes sowie der Translation der Erde angebracht.

Für die geforderte Ephemeridenpräzision von 0.1 mm über den Zeitraum von 46 Jahren wurde das Kräftemodell erweitert. Im Fall „ausgedehnter Mond - Erde“ muss das Mondschwerefeld bis Grad und Ordnung 6 modelliert werden, siehe Tabelle 4.6 für die Erde-Mond-Distanz X_{EM} und die Koordinatendifferenzen $\Delta X_{Eul,max}$. Diese Kopplung beeinflusst hauptsächlich die Rotationsbewegung, für die Translation wäre die Modellierung bis Grad und Ordnung 5 ausreichend. Für eine kompakte Darstellung werden die Potentialkoeffizienten C_{lm} und S_{lm} zu komplexen Potentialkoeffizienten K_{lm} mit Grad l und Ordnung m zusammengefasst, $K_{2..3,0..3}$ bezeichnet dann das vollständige Schwerefeld des Grades 2 und 3 eines Körpers.

Für den Fall „ausgedehnte Erde - Mond“ muss für eine Präzision von 0.1 mm das Schwerefeld der Erde ebenfalls bis Grad und Ordnung 6 modelliert werden (Tabelle 4.7). Die gravitative Kopplung beeinflusst vor allem die Translation des Mondes, da auf den Mond als Punktmasse kein direktes

Tab. 4.6: Maximaler Effekt der gravitativen Wechselwirkung zwischen ausgedehntem Mond mit den komplexen Potentialkoeffizienten K_{lm}^M und der Erde als Punktmasse auf die geozentrische Mondposition ΔX_{EM} bzw. Koordinatendifferenzen $\Delta X_{Eul,max}$. Die Werte geben jeweils die Differenz zur Ephemeride mit einem um 1 verringerten maximalen Entwicklungsgrad des Schwerefeldes an.

	$K_{2..5,0..5}^M$	$K_{2..6,0..6}^M$	$K_{2..7,0..7}^M$
ΔX_{EM} [mm]	0.82	0.01	< 0.01
$\Delta X_{Eul,max}$ [mm]	95.8	0.67	< 0.01

Tab. 4.7: Wie Tabelle 4.6 mit ausgedehnter Erde (Potentialkoeffizienten K_{lm}^E) und Mond als Punktmasse. Die Werte geben jeweils die Differenz zur Ephemeride der darüberliegenden Zeile an. Vergleichswert für das Ergebnis mit $K_{2..5,0}^E$ ist das Ergebnis mit $K_{2..4,0}^E$.

	ΔX_{EM} [mm]	$\Delta X_{Eul,max}$ [mm]
$K_{2..5,0}^E$	0.48	< 0.01
$K_{2..6,0}^E$	< 0.01	< 0.01
$K_{2..5,0}^E + K_{2..1,2}^E$	95200	397
$K_{2..5,0}^E + K_{2..3,1..3}^E$	3015	12.6
$K_{2..5,0}^E + K_{2..4,1..4}^E$	12.2	0.05
$K_{2..5,0..5}^E$	0.81	0.03
$K_{2..6,0..6}^E$	0.14	< 0.01

zusätzliches Drehmoment ausgeübt wird. Die Eulerwinkel und damit $\Delta X_{Eul,max}$ werden erst durch die veränderte Mondbahn beeinflusst, sodass der Effekt auf die Koordinatendifferenzen wesentlich kleiner ist als auf den Erde-Mond-Abstand. Die bisherige Beschränkung des Erdschwerefeldes auf rein zonale Anteile ist für Testrechnungen ausreichend. Für genaue Ergebnisse müssen die Terme des kompletten Feldes berücksichtigt werden. Die relativ große Änderung von $X_{EM} = 95.2$ m nach der einmaligen Berechnung der Ephemeride führt in der nachfolgenden Parameterschätzung hauptsächlich zu kleinen Änderungen in den Startwerten für die Geschwindigkeit des Mondes. Alle weiteren Parameter werden von dieser Modellerweiterung kaum beeinflusst. Dem gegenüber steht ein starker Anstieg in der Rechenzeit der Ephemeridenrechnung, da der Integrator automatisch die Schrittweite im Integrationsprozess anpasst. Wird der nicht-zonale Anteil des Erdschwerefeldes im Kräftemodell berücksichtigt, stellt die Erdrotation die „schnellste“ Bewegung dar und die Integrations-schrittweite verkürzt sich, während die Effekte des zonalen Feldes von der Rotation unabhängig sind. Pro integriertem Jahrzehnt steigt die Rechenzeit von 10 Minuten um den Faktor von 2.5 auf etwa 25 Minuten, wenn die nicht-zonalen Anteile der Erde in die Modellierung einfließen.

4.2.3 Wechselwirkung „ausgedehnter Körper untereinander“ im Erde-Mond-System

Über Kapitel 4.2.2 hinaus müssen auch Wechselwirkungen zwischen Erde und Mond als ausgedehnte Körper untereinander berücksichtigt werden. In der bisherigen Programmversion wurde die Kopplung zwischen den Gravitationsfeldern vom Grad 2 in einer vereinfachten Modellierung berechnet und an die Bewegungsgleichungen der Mondrotation angebracht.

Um die vollständige Kopplung der Schwerefelder zu modellieren und auch die Kopplung zwischen höheren Entwicklungsgraden zu untersuchen, wurden zwei neue Subroutinen, `kteilall` und `cslmtrafo`, in die Ephemeridenrechnung implementiert. In `kteilall` werden die Gravitationskräfte und -drehmomente zwischen Erde und Mond für die direkte Benutzung in den Bewegungsgleichungen der Translation und Rotation berechnet. Diese Berechnung erfordert zwei parallel zueinander angeordnete Bezugssysteme zwischen den beteiligten Körpern [Ilk, 1983]. Die benötigte Trans-

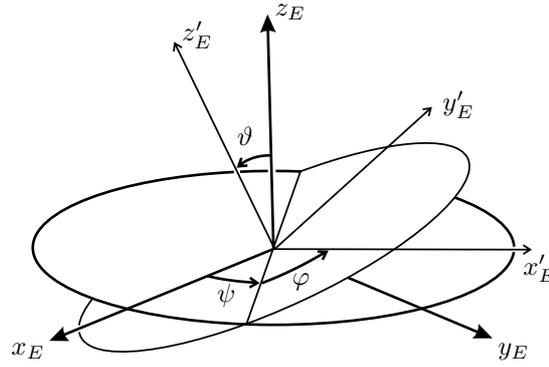


Abb. 4.8: Eulerwinkel ψ , ϑ , φ zwischen dem Erdsystem x_E , y_E , z_E und einem System parallel zum HAS des Mondes x'_E , y'_E , z'_E .

formation der im körperfesten System gegebenen Potentialkoeffizienten erfolgt in der Subroutine `cslmtrafo`.

Die Berechnung der gravitativen Kräfte erfolgt bezüglich des lunaren HAS. Dazu muss das im ITRS gegebene Schwerefeld der Erde in einem zum HAS des Mondes parallelen System ausgedrückt werden. Die Transformation vom ITRS der Erde ($\mathbf{x}_E = x_E, y_E, z_E$) in das HAS des Mondes ($\mathbf{x}'_E = x'_E, y'_E, z'_E$) wird durch eine Rotation um die jeweilige mitgedrehte z, x, z-Achse mit den Eulerwinkeln ψ , ϑ , φ (Abbildung 4.8) über

$$\mathbf{x}'_E = \mathbf{R}_z(\varphi)\mathbf{R}_x(\vartheta)\mathbf{R}_z(\psi)\mathbf{x}_E \quad (4.11)$$

realisiert. Mit den Rotationsmatrizen \mathbf{D}_E und \mathbf{D}_M aus Gleichung (2.12) und (2.15) wird die Rotationsmatrix \mathbf{D}_{EM} für den Übergang vom erdfesten zum mondfesten System gebildet

$$\mathbf{D}_{EM} = \mathbf{D}_M \mathbf{D}_E^T \quad (4.12)$$

und die gesuchten Eulerwinkel aus den Einzelelementen von \mathbf{D}_{EM} zu

$$\begin{aligned} \psi &= \arctan\left(\frac{\mathbf{D}_{EM}(3,1)}{-\mathbf{D}_{EM}(3,2)}\right), \\ \vartheta &= \arctan\left(\frac{\sqrt{\mathbf{D}_{EM}(1,3)^2 + \mathbf{D}_{EM}(2,3)^2}}{\mathbf{D}_{EM}(3,3)}\right), \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{\mathbf{D}_{EM}(1,3)}{\mathbf{D}_{EM}(2,3)}\right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

bestimmt. Die Transformation der komplexen Potentialkoeffizienten vom erdfesten ins mondparallele System ($K_{lm} \rightarrow K'_{lm}$) erfolgt nach Ilk [1983] über

$$K'_{lm} = \sum_{m'=-l}^l D_{lmm'}\left(-\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right), -\vartheta, -\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right)\right) K_{lm'}. \quad (4.14)$$

Mit

$$\begin{aligned} D_{lmm'}\left(-\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right), -\vartheta, -\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right)\right) &= i^{m-m'} (-1)^{m-m'} \left[\frac{(l+m')!(l-m)!}{(l-m')!(l+m)!}\right]^{1/2} \\ &\quad \cdot \bar{D}_{lmm'}(-\varphi, -\vartheta, -\psi), \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\bar{D}_{lmm'}(-\varphi, -\vartheta, -\psi) = e^{-im(-\varphi)} e^{-im'(-\psi)} \bar{d}_{lmm'}(-\vartheta) \quad (4.16)$$

und

$$\bar{d}_{lmm'}(-\vartheta) = (-1)^{m-m'} \left[\frac{(l+m)!(l-m)!}{(l+m')!(l-m')!} \right]^{1/2} H_{lmm'}(\vartheta) \quad (4.17)$$

folgt

$$K'_{lm} = \sum_{m'=-l}^l i^{m-m'} \frac{(l-m)!}{(l-m')!} e^{i(m\varphi+m'\psi)} H_{lmm'}(\vartheta) K_{lm'} \quad (4.18)$$

mit

$$H_{lmm'}(\vartheta) = \sum_{j=\max(0, m'-m)}^{\min(l+m', l-m)} \binom{l+m'}{j} \binom{l-m'}{l-m-j} (-1)^{j+m-m'} \cdot \left(\cos \frac{\vartheta}{2} \right)^{2l-m+m'-2j} \left(\sin \frac{\vartheta}{2} \right)^{m-m'+2j} . \quad (4.19)$$

Die Umsetzung im Ephemeridenprogramm erfolgt mittels reeller Potentialkoeffizienten. Die Beziehung zwischen komplexen und reellen Potentialkoeffizienten lautet allgemein [Ilk, 1983]

$$K_{lm} = \frac{1 + \delta_{0m}}{2} \begin{cases} C_{lm} - iS_{lm} & \text{falls } m \geq 0 \\ (-1)^m \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} (C_{l|m|} + iS_{l|m|}) & \text{falls } m < 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

mit dem Kronecker-Delta δ . Weiterhin gilt

$$e^{i(m\varphi+m'\psi)} = \cos(m\varphi + m'\psi) + i \sin(m\varphi + m'\psi) , \quad (4.21)$$

sodass aus Gleichung (4.18) folgt

$$C'_{lm} - iS'_{lm} = \frac{1}{1 + \delta_{0m}} \sum_{m'=-l}^l \frac{(l-m)!}{(l-|m'|)!} (1 + \delta_{0m'}) H_{l,m,m'}(\vartheta) \cdot \begin{cases} (-1)^{m'} i^{m-m'} (a + ib) & \text{falls } m' < 0 \\ i^{m-m'} (c + id) & \text{falls } m' \geq 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

mit

$$\begin{aligned} a &= C_{l|m'|} \cos(m\varphi + m'\psi) + S_{l|m'|} \sin(m\varphi + m'\psi) , \\ b &= C_{l|m'|} \sin(m\varphi + m'\psi) + S_{l|m'|} \cos(m\varphi + m'\psi) , \\ c &= C_{lm'} \cos(m\varphi + m'\psi) + S_{lm'} \sin(m\varphi + m'\psi) , \\ d &= C_{lm'} \sin(m\varphi + m'\psi) + S_{lm'} \cos(m\varphi + m'\psi) . \end{aligned} \quad (4.23)$$

Der Term $i^{m-m'}$ kann vier Werte annehmen: 1, -1, li, -li, deren Vorzeichen im folgenden als $V_{imm'} = (+1, -1)$ bezeichnet sind. Je nach Auftreten eines Imaginärteils \Im im Ergebnis von $i^{m-m'}$, ändern sich die Terme a bis d zu

$$(a', b', c', d') = \begin{cases} (a, b, c, d) & \text{falls } \Im(i^{m-m'}) = 0 \\ (-b, a, -d, c) & \text{falls } \Im(i^{m-m'}) \neq 0 . \end{cases} \quad (4.24)$$

Nach Trennung der reellen und imaginären Teile ergeben sich die transformierten Potentialkoeffizienten zu

$$\begin{aligned} C'_{lm} &= \frac{1}{1 + \delta_{0m}} \sum_{m'=-l}^l \frac{(l-m)!}{(l-|m'|)!} (1 + \delta_{0m'}) H_{l,m,m'}(\vartheta) V_{imm'} \begin{cases} (-1)^{m'} a' & \text{falls } m' < 0 \\ c' & \text{falls } m' \geq 0, \end{cases} \\ S'_{lm} &= -\frac{1}{1 + \delta_{0m}} \sum_{m'=-l}^l \frac{(l-m)!}{(l-|m'|)!} (1 + \delta_{0m'}) H_{l,m,m'}(\vartheta) V_{imm'} \begin{cases} (-1)^{m'} b' & \text{falls } m' < 0 \\ d' & \text{falls } m' \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Mit den transformierten Potentialkoeffizienten der Erde können die Anteile der Figurenkräfte zwischen Mond und Erde untereinander für Translation und Rotation im HAS des Mondes berechnet werden. Die Position der Erde im HAS kann über die Kobreite θ , Länge λ und den radialen Abstand X_{EM} beschrieben werden. Damit können die Laplaceschen Kugelflächenfunktionen

$$\begin{aligned} Y_{lm}^c &= P_{lm}(\cos \theta) \cos m\lambda, \\ Y_{lm}^s &= P_{lm}(\cos \theta) \sin m\lambda \end{aligned} \quad (4.26)$$

mit den assoziierten Legendrefunktionen $P_{lm}(\cos \theta)$ gebildet werden, siehe [Torge und Müller \[2012\]](#) sowie [Heiskanen und Moritz \[1967\]](#). Für negative Ordnungen sind die Kugelflächenfunktionen definiert über [\[Ilk, 1983\]](#)

$$\begin{aligned} Y_{l,-m}^c &= (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} Y_{l,m}^c, \\ Y_{l,-m}^s &= (-1)^{m+1} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} Y_{l,m}^s. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Nach [Gleixner \[1982\]](#) ergeben sich die Gravitationskräfte F_{EM} zwischen Mond (Schwerefeld von Grad l und Ordnung m) und Erde (Schwerefeld von Grad j und Ordnung k) in den drei Koordinatenrichtungen des lunaren HAS zu

$$\begin{aligned} F_{EM,x} &= \frac{-GM_E M_M}{4X_{EM}^2} \sum_{l=2}^{l_{max}} \sum_{m=0}^l \sum_{j=2}^{j_{max}} \sum_{k=0}^j \frac{R_M^l R_E^j}{X_{EM}^{l+j}} \frac{(-1)^j}{(j-k)!(l-m)!} \\ &\cdot \left[(l-m+j-k)! \left(C'_{jk} (C_{lm} Y_{l+j+1,m+k+1}^c + S_{lm} Y_{l+j+1,m+k+1}^s) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. S'_{jk} (C_{lm} Y_{l+j+1,m+k+1}^s - S_{lm} Y_{l+j+1,m+k+1}^c) \right) \right. \\ &+ (l-m+j+k)! (-1)^k \left(C'_{jk} (C_{lm} Y_{l+j+1,m-k+1}^c + S_{lm} Y_{l+j+1,m-k+1}^s) + \right. \\ &\quad \left. S'_{jk} (-C_{lm} Y_{l+j+1,m-k+1}^s + S_{lm} Y_{l+j+1,m-k+1}^c) \right) \\ &+ (l+m+j-k)! (-1)^m \left(C'_{jk} (C_{lm} Y_{l+j+1,-m+k+1}^c - S_{lm} Y_{l+j+1,-m+k+1}^s) + \right. \\ &\quad \left. S'_{jk} (C_{lm} Y_{l+j+1,-m+k+1}^s + S_{lm} Y_{l+j+1,-m+k+1}^c) \right) \\ &+ (l+m+j+k)! (-1)^{m+k} \left(C'_{jk} (C_{lm} Y_{l+j+1,-m-k+1}^c - S_{lm} Y_{l+j+1,-m-k+1}^s) + \right. \\ &\quad \left. S'_{jk} (-C_{lm} Y_{l+j+1,-m-k+1}^s - S_{lm} Y_{l+j+1,-m-k+1}^c) \right) \left. \right], \end{aligned} \quad (4.28a)$$

$$\begin{aligned}
F_{EM,y} = & \frac{-GM_E M_M}{4X_{EM}^2} \sum_{l=2}^{l_{max}} \sum_{m=0}^l \sum_{j=2}^{j_{max}} \sum_{k=0}^j \frac{R_M^l R_E^j}{X_{EM}^{l+j}} \frac{(-1)^j}{(j-k)!(l-m)!} \\
& \cdot \left[(l-m+j-k)! \left(C'_{jk} (C_{lm} Y_{l+j+1, m+k+1}^s - S_{lm} Y_{l+j+1, m+k+1}^c) + \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. S'_{jk} (-C_{lm} Y_{l+j+1, m+k+1}^c - S_{lm} Y_{l+j+1, m+k+1}^s) \right) \right. \\
& + (l-m+j+k)! (-1)^k \left(C'_{jk} (C_{lm} Y_{l+j+1, m-k+1}^s - S_{lm} Y_{l+j+1, m-k+1}^c) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. S'_{jk} (C_{lm} Y_{l+j+1, m-k+1}^c + S_{lm} Y_{l+j+1, m-k+1}^s) \right) \right. \\
& + (l+m+j-k)! (-1)^m \left(C'_{jk} (C_{lm} Y_{l+j+1, -m+k+1}^s + S_{lm} Y_{l+j+1, -m+k+1}^c) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. S'_{jk} (-C_{lm} Y_{l+j+1, -m+k+1}^c + S_{lm} Y_{l+j+1, -m+k+1}^s) \right) \right. \\
& \left. + (l+m+j+k)! (-1)^{m+k} \left(C'_{jk} (C_{lm} Y_{l+j+1, -m-k+1}^s + S_{lm} Y_{l+j+1, -m-k+1}^c) + \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. S'_{jk} (C_{lm} Y_{l+j+1, -m-k+1}^c - S_{lm} Y_{l+j+1, -m-k+1}^s) \right) \right], \tag{4.28b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{EM,z} = & \frac{-GM_E M_M}{2X_{EM}^2} \sum_{l=2}^{l_{max}} \sum_{m=0}^l \sum_{j=2}^{j_{max}} \sum_{k=0}^j \frac{R_M^l R_E^j}{X_{EM}^{l+j}} \frac{(-1)^j}{(j-k)!(l-m)!} \\
& \cdot \left[(l-m+j-k+1)! \left(C'_{jk} (C_{lm} Y_{l+j+1, m+k}^c + S_{lm} Y_{l+j+1, m+k}^s) + \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. S'_{jk} (C_{lm} Y_{l+j+1, m+k}^s - S_{lm} Y_{l+j+1, m+k}^c) \right) \right. \\
& + (l-m+j+k+1)! (-1)^k \left(C'_{jk} (C_{lm} Y_{l+j+1, m-k}^c + S_{lm} Y_{l+j+1, m-k}^s) - \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. S'_{jk} (C_{lm} Y_{l+j+1, m-k}^s - S_{lm} Y_{l+j+1, m-k}^c) \right) \right]. \tag{4.28c}
\end{aligned}$$

Im Fall $l = 0$ beziehungsweise $j = 0$ erhält man die Gravitationskräfte zwischen einem ausgedehnten Körper und einer Punktmasse, die bereits in Kapitel 4.2.2 verwendet wurden. Da hier nur die Figurenkräfte untereinander betrachtet und keine Grad-1 Terme des Schwerfeldes zugelassen werden, kann die Berechnung bei $l = j = 2$ beginnen. Die berechnete Gravitationskraft F_{EM} wird an die Translationsbewegung der Erde und des Mondes angebracht. Für die Rotation des Mondes wird das resultierende Gravitationsdrehmoment berechnet und an die Eulerschen Kreisgleichungen (4.60) angebracht. Nach [Gleixner \[1982\]](#) berechnet sich das Drehmoment T_{EM} im HAS des

Mondes zu

$$\begin{aligned}
T_{EM,x} = & \frac{GM_E M_M}{4X_{EM}} \sum_{l=2}^{l_{max}} \sum_{m=0}^l \sum_{j=2}^{j_{max}} \sum_{k=0}^j \frac{R_M^l R_E^j}{X_{EM}^{l+j}} \frac{(-1)^j}{(j-k)!(l-m)!} \\
& \cdot \left[(l-m)(l-m+j-k-1)! \left(C_{lm}(-C'_{jk}Y_{l+j,m+k+1}^s + S'_{jk}Y_{l+j,m+k+1}^c) + \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. S_{lm}(C'_{jk}Y_{l+j,m+k+1}^c + S'_{jk}Y_{l+j,m+k+1}^s) \right) \\
& + (l-m)(l-m+j+k-1)!(-1)^k \left(C_{lm}(-C'_{jk}Y_{l+j,m-k+1}^s - S'_{jk}Y_{l+j,m-k+1}^c) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. S_{lm}(C'_{jk}Y_{l+j,m-k+1}^c - S'_{jk}Y_{l+j,m-k+1}^s) \right) \\
& + (l+m)(l+m+j-k-1)!(-1)^m \left(C_{lm}(-C'_{jk}Y_{l+j,-m+k+1}^s + S'_{jk}Y_{l+j,-m+k+1}^c) - \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. S_{lm}(C'_{jk}Y_{l+j,-m+k+1}^c + S'_{jk}Y_{l+j,-m+k+1}^s) \right) \\
& + (l+m)(l+m+j+k-1)!(-1)^{m+k} \left(C_{lm}(-C'_{jk}Y_{l+j,-m-k+1}^s - S'_{jk}Y_{l+j,-m-k+1}^c) - \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. S_{lm}(C'_{jk}Y_{l+j,-m-k+1}^c - S'_{jk}Y_{l+j,-m-k+1}^s) \right) \left. \right], \tag{4.29a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{EM,y} = & \frac{GM_E M_M}{4X_{EM}} \sum_{l=2}^{l_{max}} \sum_{m=0}^l \sum_{j=2}^{j_{max}} \sum_{k=0}^j \frac{R_M^l R_E^j}{X_{EM}^{l+j}} \frac{(-1)^j}{(j-k)!(l-m)!} \\
& \cdot \left[(l-m)(l-m+j-k-1)! \left(C_{lm}(C'_{jk}Y_{l+j,m+k+1}^c + S'_{jk}Y_{l+j,m+k+1}^s) + \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. S_{lm}(C'_{jk}Y_{l+j,m+k+1}^s - S'_{jk}Y_{l+j,m+k+1}^c) \right) \\
& + (l-m)(l-m+j+k-1)!(-1)^k \left(C_{lm}(C'_{jk}Y_{l+j,m-k+1}^c - S'_{jk}Y_{l+j,m-k+1}^s) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. S_{lm}(C'_{jk}Y_{l+j,m-k+1}^s + S'_{jk}Y_{l+j,m-k+1}^c) \right) \\
& + (l+m)(l+m+j-k-1)!(-1)^m \left(C_{lm}(C'_{jk}Y_{l+j,-m+k+1}^c + S'_{jk}Y_{l+j,-m+k+1}^s) - \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. S_{lm}(C'_{jk}Y_{l+j,-m+k+1}^s - S'_{jk}Y_{l+j,-m+k+1}^c) \right) \\
& + (l+m)(l+m+j+k-1)!(-1)^{m+k} \left(C_{lm}(C'_{jk}Y_{l+j,-m-k+1}^c - S'_{jk}Y_{l+j,-m-k+1}^s) - \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. S_{lm}(C'_{jk}Y_{l+j,-m-k+1}^s + S'_{jk}Y_{l+j,-m-k+1}^c) \right) \left. \right], \tag{4.29b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{EM,z} = & \frac{GM_E M_M}{2X_{EM}} \sum_{l=2}^{l_{max}} \sum_{m=0}^l \sum_{j=2}^{j_{max}} \sum_{k=0}^j \frac{R_M^l R_E^j}{X_{EM}^{l+j}} \frac{(-1)^j m}{(j-k)!(l-m)!} \\
& \cdot \left[(l-m+j-k)! \left(C_{lm}(C'_{jk}Y_{l+j,m+k}^s - S'_{jk}Y_{l+j,m+k}^c) - \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. S_{lm}(C'_{jk}Y_{l+j,m+k}^c + S'_{jk}Y_{l+j,m+k}^s) \right) \\
& + (l-m+j+k)!(-1)^k \left(C_{lm}(C'_{jk}Y_{l+j,m-k}^s + S'_{jk}Y_{l+j,m-k}^c) - \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. S_{lm}(C'_{jk}Y_{l+j,m-k}^c - S'_{jk}Y_{l+j,m-k}^s) \right) \left. \right]. \tag{4.29c}
\end{aligned}$$

Bislang wurden die resultierenden Drehmomente aus der Wechselwirkung zwischen den Grad-2 Schwerefeldern von Erde und Mond modelliert und an die Bewegungsgleichungen der Rotation angebracht. Die Modellierung beschränkte sich jedoch auf die Terme, in denen der C'_{20} -Koeffizient des im parallelen Mondsystem beschriebenen Gravitationsfeldes der Erde vorkam. Terme mit C'_{21}

Tab. 4.8: Maximaler Effekt der gravitativen Wechselwirkung zwischen ausgedehntem Mond (K_{lm}^M) und ausgedehnter Erde (K_{lm}^E) auf die geozentrische Mondposition ΔX_{EM} bzw. Koordinatendifferenzen $\Delta X_{Eul,max}$. Die ersten beiden Zeilen vergleichen die neue Modellierung mit der bisherigen Programmversion. Bei (R) werden die Kräfte nur an den Gleichungen der Rotation angebracht, sonst bei Translation und Rotation.

	ΔX_{EM} [mm]	$\Delta X_{Eul,max}$ [mm]	
$K_{2,0..2}^E / K_{2,0..2}^M$ (R)	190.5	1730.2	} Differenz zu $K_{2,0..2}^E / K_{2,0..2}^M$ (alt)
$K_{2,0..2}^E / K_{2,0..2}^M$	1845.3	1730.3	
$K_{2,0..2}^E / K_{2..3,0..3}^M$	3.73	8.20	} Differenz zu $K_{2,0..2}^E / K_{2,0..2}^M$
$K_{2..3,0..3}^E / K_{2,0..2}^M$	0.40	0.06	
$K_{2..3,0..3}^E / K_{2..3,0..3}^M$	3.36	8.25	
$K_{2..3,0..3}^E / K_{2..4,0..4}^M$	0.27	0.05	} Differenz zu $K_{3,0..3}^E / K_{3,0..3}^M$
$K_{2..4,0..4}^E / K_{2..4,0..4}^M$	0.26	0.05	
$K_{2..3,0..3}^E / K_{2..5,0..5}^M$	0.09	< 0.01	} Differenz zu $K_{3,0..3}^E / K_{4,0..4}^M$
$K_{2..4,0..4}^E / K_{2..5,0..5}^M$	0.03	< 0.01	
$K_{2..5,0..5}^E / K_{2..5,0..5}^M$	0.04	< 0.01	
$K_{2..3,0..3}^E / K_{2..6,0..6}^M$	0.02	< 0.01	

und C'_{22} wurden nicht berücksichtigt. Aus Gleichung (4.29) ergeben sich für $l = 2$, $m = 0..2$, $j = 2$ und $k = 0$ ($k = 1, 2$ nicht enthalten) die bisher verwendeten Drehmomentgleichungen

$$\begin{aligned}
T_{EM,x}^{alt} &= -3 \frac{GM_E M_M R_M^2 R_E^2}{X_{EM}^5} (C_{20} + 2C_{22}) C'_{20} Y_{4,1}^s, \\
T_{EM,y}^{alt} &= 3 \frac{GM_E M_M R_M^2 R_E^2}{X_{EM}^5} (C_{20} - 2C_{22}) C'_{20} Y_{4,1}^c, \\
T_{EM,z}^{alt} &= 2 \frac{GM_E M_M R_M^2 R_E^2}{X_{EM}^5} C_{22} C'_{20} Y_{4,2}^s.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

In dieser Arbeit wird die vollständige Information des transformierten Erdschwerefeldes verwendet.

Die Effekte der Figurenkräfte auf die Mondephemeride sind in Tabelle 4.8 zusammengefasst. Werden die jetzt komplett vorliegenden Drehmomente der Grad-2 Kopplung an die Rotation des Mondes angebracht und eine vergleichende, 46-jährige Ephemeride berechnet, ergeben sich Änderungen der Koordinatendifferenzen $\Delta X_{Eul,max}$ in der Größenordnung von 1.7 m zur alten Lösung. Die Änderung in der Erde-Mond-Entfernung von 19 cm resultiert aus indirekten Effekten aufgrund der veränderten Mondorientierung, z.B. durch die Kopplung ausgedehnter Körper - Punktmasse. Wird die Grad-2 Kopplung auch an die Translationsbewegung von Erde und Mond angebracht, führt dies zu Änderungen in der Erde-Mond-Distanz ΔX_{EM} von 1.85 m, während $\Delta X_{Eul,max}$ keine zusätzlichen Änderungen zeigt. Die Kopplungen zwischen höheren Entwicklungsgraden beider Schwerefelder führen zu zusätzlichen Änderungen in mm-Bereich. Das Schwerefeld des Mondes ist im Vergleich zur Erde „rauer“, d.h. die Gradvarianzen des lunaren Gravitationsfeldes fallen mit höherem Grad weniger stark ab. Dies zeigt sich beispielsweise im Vergleich der Grad-2/Grad-3-Kopplung. Im Fall $K_{2,0..2}^E / K_{2..3,0..3}^M$ wird die Ephemeride des Mondes mit maximal 8.2 mm in der Rotation deutlich stärker beeinflusst als im Fall $K_{2..3,0..3}^E / K_{2,0..2}^M$ mit maximal 0.4 mm im Erde-Mond-Abstand. Um eine Ephemeridenpräzision von 0.1 mm einzuhalten, muss die Interaktion zwischen dem Erdschwerefeld bis Grad und Ordnung 3 und dem Mondschwerefeld bis Grad und Ordnung 4 berücksichtigt werden.

Abbildung 4.9 zeigt die Veränderung des jährlichen wrms der 1-Weg-Residuen nach der Ausgleichung. Besonders bis 1990 wird der wrms um mehrere cm reduziert, in den letzten beiden Jahr-

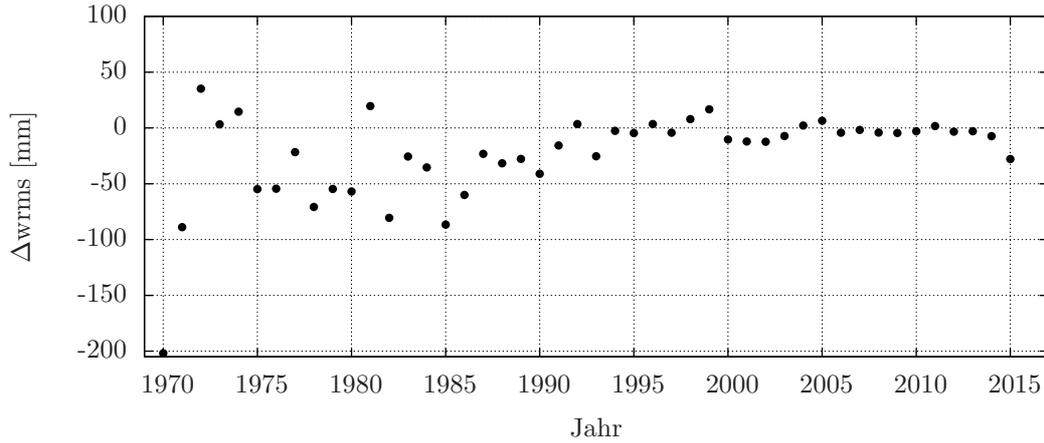


Abb. 4.9: Differenz des jährlichen wrms der 1-Weg-Residuen mit neuer Modellierung der Wechselwirkung zwischen den Grad-2 Schwerefeldern von Erde und Mond zur bisherigen Programmversion.

zehnten kann der wrms im mm-Bereich, teilweise im cm Bereich gesenkt werden. Die genaueren Beobachtungen ab 1995, insbesondere mit den Daten der APOLLO-Station ab 2006, beeinflussen durch ihr hohes Gewicht maßgeblich die LLR-Analyse und die geschätzten Startwerte für die Mondephemeride. Etwaige Modellierungsungenauigkeiten der Ephemeride zeigen sich insbesondere in den Residuen der LLR-Messungen vor 1990, da diese Beobachtungen durch ihr geringes Gewicht die Ephemeridenstartwerte kaum beeinflussen können. Mit der neuen Modellierung wird die Ephemeride des Mondes wesentlich verbessert, da sich neben den Residuen der genauen neueren LLR-Messungen vor allem die Residuen der Messungen vor 1990 verringerten. Die stärkere Reduktion des wrms für 2015 im Vergleich zu den Vorjahren, ist auf die sehr wenigen NP des genutzten Datensatz in diesem Jahr zurückzuführen. Bereits geringe Änderungen von einzelnen Residuen können in diesem Fall eine deutliche Reduktion des jährlichen Wertes hervorrufen. Abbildung 4.9 stellt den direkten Vergleich zwischen der neuen und bisherigen Modellierung mit dem gleichen Datensatz und den gleichen mitgeschätzten Parametern dar. Dabei wurden noch keine Ausreißer eliminiert, die den wrms in einigen Fällen, zum Beispiel in Verbindung mit wenigen Messwerten pro Jahr, verschlechtern können.

4.2.4 Säkulare Variationen im zonalen Erdschwerefeld

Das bisher in der Ephemeridenrechnung verwendete Erdschwerefeldmodell GRIM2 [Balmino u. a., 1976] wurde durch das EGM2008 Modell [Pavlis u. a., 2008; Pavlis u. a., 2012] ersetzt. Die normierten Potentialkoeffizienten \bar{C}_{lm} und \bar{S}_{lm} wurden mit Hilfe von

$$\begin{Bmatrix} C_{lm} \\ S_{lm} \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{(l-m)!(2l+1)(2-\delta_{0m})}{(l+m)!}} \begin{Bmatrix} \bar{C}_{lm} \\ \bar{S}_{lm} \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

in unnormierte Koeffizienten umgerechnet [Petit und Luzum, 2010]. Die Potentialkoeffizienten des EGM2008 liegen bezüglich des ITRS vor. In der bisherigen Ephemeridenrechnung mussten diese Koeffizienten vor der Berechnung vom ITRS in das HAS der Erde transformiert werden. Um künftige Aktualisierungen der Schwerefeldparameter zu vereinfachen und die folgenden Modelle der zeitvariablen Schwerefeldanteile ohne Transformation nutzen zu können, wurde das Ephemeridenprogramm auf die Verwendung von Potentialkoeffizienten im ITRS umgestellt. Da die Rotation der Erde nicht über Euler-Liouville Gleichungen mitintegriert, sondern über Modelle zu Erdrotation, Präzession und Nutation modelliert wird (Kapitel 2.2.1), ist die Verwendung des HAS der Erde zur Vereinfachung der Rotationsberechnung nicht nötig.

Das Gezeitenpotential vom Grad 2 besitzt einen von Null verschiedenen zeitlichen Mittelwert. Daraus resultiert eine permanente Deformation der Erde. In der Ephemeridenrechnung wird dies durch die Verwendung des „zero tide“ Wertes für C_{20} berücksichtigt, der die permanente Deformation enthält. Gemäß den IERS Conventions 2010 wird für C_{20} der auf einer 4-jährigen Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE)-Lösung basierte EGM2008-Wert durch einen Wert aus 17 Jahren SLR-Beobachtungen ersetzt [Petit und Luzum, 2010; Cheng u. a., 2011]. Die andauernde nacheiszeitliche Landhebung, Massenumverteilungen in der Atmo-, Hydro- und Kryosphäre zwischen den Polar- und Äquatorgebieten und Massenumverteilungen im Erdinneren führen zu gezeitenunabhängigen Veränderungen in den Potentialkoeffizienten. Mit Hilfe von SLR können langfristige Trends über Jahrzehnte [Cheng u. a., 1997; Biancale u. a., 2000] sowie mit zeitlich hochauflösenden Schwerefeldmodellen auch höherfrequente Änderungen bestimmt werden, zum Beispiel Bruinsma u. a. [2010]; Cheng u. a. [2011]; Rudenko u. a. [2014].

Für die Berechnung der Mondbahn ist das langfristige Verhalten der niederen zonalen Koeffizienten (insbesondere Veränderungen des C_{20} -Terms) von Bedeutung, deren Variationen im erweiterten Ephemeridenprogramm berücksichtigt werden können. In den IERS Conventions 2010 werden lineare Trends für C_{20} , C_{30} und C_{40} angegeben. Der Wert für \dot{C}_{20} wurde aus reinen Laser Geodynamics Satellite (LAGEOS)-Beobachtungen ermittelt und ist bereits über 20 Jahre alt [Nerem u. a., 1993]. Für \dot{C}_{30} und \dot{C}_{40} wurden SLR Beobachtungen zu 8 Satelliten verwendet [Cheng u. a., 1997]. Alternative Werte für \dot{C}_{20} , \dot{C}_{30} und \dot{C}_{40} werden von Biancale u. a. [2000] aus Beobachtungen zu insgesamt 21 Satelliten angegeben. Die zeitliche Änderung des C_{20} -Koeffizienten verringerte sich ab Mitte der 1990er Jahre. Dieses Verhalten wird von Cheng u. a. [2013] mit einer quadratischen Funktion und von Roy und Peltier [2011] mit einer zweigeteilten linearen Funktion modelliert. Tabelle 4.9 fasst die Effekte der unterschiedlichen Modellierung der niederen zonalen Schwerefeldkoeffizienten auf die Mondephemeride (ΔX_{EM} und $\Delta X_{Eul,max}$) und die Verbesserungsquadratsumme $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ der ausgeglichenen LLR-Daten zusammen. Der Referenzwert für C_{x0} bezieht sich auf J2000.0. Mit $dt = t - J2000$ berechnen sich die Koeffizienten über

$$C_{x0}(t) = C_{x0}(J2000) + \dot{C}_{x0} dt + \frac{1}{2} \ddot{C}_{x0} dt^2 . \quad (4.32)$$

Die Verwendung der zeitabhängigen Potentialkoeffizienten wirkt sich hauptsächlich auf die Erde-Mond-Entfernung aus. Die Ergebnisse aus unterschiedlichen Modellen der zeitlichen Entwicklung der Potentialkoeffizienten können nur unzureichend aus den Koordinatenänderungen ΔX bewertet werden, da der „wahre“ Wert nicht bekannt ist. Aus diesem Grund wird der $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ -Wert verwendet, um zu beurteilen, wie gut das jeweilige Modell die LLR-Beobachtungen approximiert. Ersetzt man den EGM2008-Wert von C_{20} durch den IERS Conventions 2010-Wert ergibt sich eine Änderung von 38 cm in der Erde-Mond-Entfernung einer 46-jährigen Ephemeride. Wird der Conventions-Wert in der iterativen Ausgleichung der LLR-Daten genutzt, verkleinert sich der resultierende Wert für $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ und bestätigt die Verwendung des Wertes aus SLR-Beobachtungen. Erweitert man die Modellierung um den Conventions-Wert von \dot{C}_{20} (im Folgenden „Conventions- C_{20} -Lösung“), ergibt sich bezüglich des EGM2008-Modells eine radiale Änderung von 61 cm im Erde-Mond-Abstand und eine weitere Reduktion von $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ im Vergleich zur reinen C_{20} -Lösung („Block“ 2 in Tabelle 4.9).

Die Verwendung von neueren Modellen der C_{20} -Entwicklung in der Ephemeridenrechnung führt nicht zwangsläufig zu besseren Ergebnissen (Block 3 und 4 in Tabelle 4.9). Mit C_{20} und \dot{C}_{20} von Cheng u. a. [2013] ergibt sich nach der Ausgleichung ein geringfügig schlechteres $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ im Vergleich zur Conventions- C_{20} -Lösung. Wird der quadratische Term dazugenommen, verschlechtert sich der Wert deutlich. Der quadratische Ansatz modelliert die Veränderung von C_{20} im von Cheng u. a. [2013] betrachteten Zeitraum zwischen 1975 und 2011 sehr gut, führt jedoch außerhalb dieses Zeitraumes zu schnell anwachsenden Abweichungen vom realen C_{20} , was die Qualität der zwischen 1969 und 2015 integrierten Ephemeride reduziert. Die zeitliche Trennung von \dot{C}_{20} in zwei Bereiche nach

Tab. 4.9: Maximaler Effekt der niederen zonalen Potentialkoeffizienten der Erde und deren zeitliche Variation auf die geozentrische Mondposition ΔX_{EM} , Koordinatendifferenzen $\Delta X_{Eul,max}$ und die Verbesserungsquadratsumme $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ nach der Ausgleichung. Referenzen: [1] EGM2008, [2] nach IERS Conventions 2010, [3] Cheng u. a. [2013], [4] Roy und Peltier [2011], [5] Biancale u. a. [2000]. ΔX bezieht sich für C_{20} und \dot{C}_{20} nach [2] auf die EGM2008 Lösung, ansonsten ist die Differenz zum 2. Block angeben. Die Werte für C_{30} und C_{40} entsprechen dem EGM2008.

Koeffizient	Wert	Referenz	ΔX_{EM} [mm]	$\Delta X_{Eul,max}$ [mm]	$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$
C_{20}	$-1.08263551 \times 10^{-3}$	[1]			63212.8
C_{20}	$-1.08263587 \times 10^{-3}$	[2]	382	1.6	63172.1
+ \dot{C}_{20}	$2.6 \times 10^{-11} \text{a}^{-1}$	[2]	609	2.6	63164.3
C_{20}	$-1.08263581 \times 10^{-3}$	[3]	267	1.2	63176.5
+ \dot{C}_{20}	$5.9 \times 10^{-12} \text{a}^{-1}$	[3]			
+ \ddot{C}_{20}	$-1.8 \times 10^{-12} \text{a}^{-2}$	[3]	56	0.3	63213.0
C_{20}	$-1.08263587 \times 10^{-3}$	[2]			
+ $\dot{C}_{20}^{<1992}$	$3.7 \times 10^{-11} \text{a}^{-1}$	[4]	35	0.1	63180.0
+ $\dot{C}_{20}^{\geq 1992}$	$0.9 \times 10^{-11} \text{a}^{-1}$	[4]			
C_{20}	$-1.08263587 \times 10^{-3}$	[2]			
+ \dot{C}_{20}	$2.6 \times 10^{-11} \text{a}^{-1}$	[2]			
+ \dot{C}_{30}	$1.3 \times 10^{-11} \text{a}^{-1}$	[2]	3	0.01	63164.2
+ \dot{C}_{40}	$1.4 \times 10^{-11} \text{a}^{-1}$	[2]			
C_{20}	$-1.08263587 \times 10^{-3}$	[2]			
+ \dot{C}_{20}	$3.1 \times 10^{-11} \text{a}^{-1}$	[5]	56	0.2	63163.1
+ \dot{C}_{30}	$0.8 \times 10^{-11} \text{a}^{-1}$	[5]			
+ \dot{C}_{40}	$3.6 \times 10^{-11} \text{a}^{-1}$	[5]			

Roy und Peltier [2011] führt ebenfalls zu einer Verschlechterung des $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ -Wertes bezüglich der Conventions- C_{20} -Lösung. Zeitliche Veränderungen in C_{30} und C_{40} ergeben nur eine sehr geringe Verbesserung des Modells, wobei die in Biancale u. a. [2000] angegebenen Werte zu einem minimal kleineren $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ führen.

Da die Anwendung der IERS Conventions 2010 eine der Grundlagen der LLR-Auswertung darstellt, werden in der künftigen Ephemeridenrechnung die in den Conventions angegebenen Werte für C_{20} und \dot{C}_{20} verwendet. Der Effekt von neueren Modellen sollte im Abstand von einigen Jahren untersucht werden, um die langzeitliche Entwicklung der Potentialkoeffizienten möglichst gut im Ephemeridenprogramm abzubilden. Die Änderungen in den Koeffizienten C_{30} und C_{40} werden zur Zeit nicht berücksichtigt, da die zusätzliche Verbesserung der Mondephemeride geringer ausfällt als die Variationen zwischen einzelnen Modellen im C_{20} -Term. In einer künftigen Modellerweiterung könnten diese Variationen in Verbindung mit kurzperiodischen, z.B. jährlichen, Änderungen des C_{20} -Terms aus SLR-Lösungen berücksichtigt werden. Die Abweichungen in der berechneten Ephemeride zeigen, dass eine Präzision von 0.1 mm über einen Zeitraum von 46 Jahren aufgrund der Zeitvariabilität des Erdschwerefeldes nicht eingehalten werden kann. Es ist in künftigen Studien zu untersuchen, ob mit gemessenen Korrekturwerten die in der Vergangenheit liegende Ephemeride des Mondes verbessert werden kann. Für die Prädiktion bleiben die Unsicherheiten aus dem Modell erhalten.

4.2.5 Gezeitendeformation der Erde

Die Anziehungskraft der Körper im Sonnensystem, vor allem von Mond und Sonne, in Verbindung mit der Bewegung um den jeweiligen gemeinsamen Massenmittelpunkt, führen zu Gezeitenkräften

auf den Erdkörper. Durch die Elastizität der Kruste und des Mantelmaterials führen die Gezeitenkräfte zu Deformationen der Erde im Dezimeterbereich und werden als Gezeiten der festen Erde bezeichnet, deren Modellierung in dieser Arbeit erweitert wurde. Neben den Gezeiten der festen Erde treten auch Gezeiten in den Ozeanen und der Atmosphäre auf. Die damit einhergehenden Massenverlagerungen erzeugen zusätzlich zum Gravitationspotential der Erde ein Deformationspotential. Dieses Potential kann durch zeitliche Änderungen der Potentialkoeffizienten beschrieben werden und führt zu zusätzlichen Wechselwirkungen zwischen Erde und Mond.

Bislang wurde der Effekt der festen Erdgezeiten durch ein stark vereinfachtes Modell berücksichtigt. In Anlehnung an die DE102-Ephemeride des JPL wurde eine zusätzliche Beschleunigung des Erde-Mond-Vektors $\ddot{\mathbf{x}}_{EM,tide}$ nach [Newhall u. a. \[1983\]](#) implementiert

$$\ddot{\mathbf{x}}_{EM,tide} = -3 \frac{GM_M R_E^5}{X_{EM}^8} \left(1 + \frac{M_m}{M_E}\right) k_2 \begin{pmatrix} x + \delta y \\ y - \delta x \\ z \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

mit der Lovezahl k_2 , den kartesischen Koordinaten des Mondes im erdfesten System x, y, z und dem Winkel δ , der die zeitverzögerte Reaktion der elastischen Erde auf äußere Kräfte beschreibt. Die Lovezahlen [\[Love, 1944\]](#) beschreiben die Reaktion einer sphärisch-symmetrischen, elastischen, nicht-rotierenden, ozeanfreien Erde auf das gezeitenerzeugende Potential (Lovezahlen k_l) und die daraus folgenden Deformationen (Lovezahlen h_l und Shidazahlen l_l). In der Berechnung wurde nur der Einfluss der vom Mond erzeugten Gezeiten auf die Translationsbewegung des Mondes berücksichtigt. Um den Effekt von weiteren Gezeiten erzeugenden Körpern, z.B. Sonne, auf die Erde und die daraus folgende Gezeitenwechselwirkung mit dem Mond (auf Translation und Rotation) besser zu erfassen, wurde das Gezeitenmodell in dieser Arbeit erweitert.

Betrachtet wird die Erde als ein deformierbarer Körper und ein beliebiger gezeitenerzeugender punktförmiger Körper j im Außenraum. Das von j , mit den erdfesten, geozentrischen Koordinaten $\mathbf{x}_j = (X_j, \theta_j, \lambda_j)$ mit $X_j = |\mathbf{x}_j| = \sqrt{x_j^2 + y_j^2 + z_j^2}$, hervorgerufene gezeitenerzeugende Potential V_t an der Erdoberfläche im Punkt P mit $\mathbf{x}_P = (R_E, \theta, \lambda)$ und dem geozentrischen Winkel ψ zwischen P und j kann nach [Lambeck \[1988\]](#) beschrieben werden durch

$$\begin{aligned} V_t(R_E, \theta, \lambda) &= \sum_{l=0}^{\infty} V_l \\ &= -\frac{GM_j}{X_j} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R_E}{X_j}\right)^l P_{l0}(\cos \psi) \\ &= -\frac{GM_j}{X_j} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R_E}{X_j}\right)^l \sum_{m=0}^l (2 - \delta_{0m}) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{lm}(\cos \theta) P_{lm}(\cos \theta_j) \cos m(\lambda - \lambda_j). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Für $l = 0$ nimmt $V_{t,0}$ den von P unabhängigen Wert $-GM_j X_j^{-1}$ an und die resultierende Beschleunigung $-\nabla V_{t,0} = 0$. Für $l = 1$ ergibt sich $V_{t,1} = -GM_j X_j^{-3} \mathbf{x}_P \mathbf{x}_j$. Die resultierende Beschleunigung $-\nabla V_{t,1} = GM_j X_j^{-3} \mathbf{x}_j$ ist unabhängig von P und konstant. Die Grad-0 und Grad-1 Terme führen somit zu keiner Deformation der Erde und die Reihenentwicklung für V_t beginnt mit Grad 2

$$V_t(R_E, \theta, \lambda) = -\frac{GM_j}{X_j} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{R_E}{X_j}\right)^l \sum_{m=0}^l (2 - \delta_{0m}) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{lm}(\cos \theta) P_{lm}(\cos \theta_j) \cos m(\lambda - \lambda_j). \quad (4.35)$$

Für einen elastischen Körper erzeugt die Deformation ein zum gezeitenerzeugenden Potential proportionales, zusätzliches Deformationspotential V_d . An der Erdoberfläche gilt

$$V_d(R_E) = \sum_l k_l V_{t,l}(R_E) \quad (4.36)$$

mit den gradabhängigen Potential-Lovezahlen k_l . Um die Wirkung des Deformationspotentials auf den Mond zu berechnen, muss Gleichung (4.36) für einen Punkt im Außenraum der Erde im Abstand $X > R_E$ beschrieben werden durch [Lambeck, 1988]

$$V_d(X) = \sum_l k_l \left(\frac{R_E}{X} \right)^{l+1} V_{t,l}(R_E). \quad (4.37)$$

Einsetzen von (4.35) beschreibt das Deformationspotential über Änderungen der Potentialkoeffizienten ΔC_{lm} und ΔS_{lm} . Weiterhin wird die Abhängigkeit der Potential-Lovezahl von der Ordnung des Potentials berücksichtigt ($k_l \rightarrow k_{lm}$) [Petit und Luzum, 2010], da die Reaktion der Erde von der Frequenz des erzeugenden Potentials abhängt. Es folgt

$$\begin{aligned} V_d(X) &= -\frac{GM_E}{X} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l k_{lm} \frac{M_j}{M_E} \left(\frac{R_E}{X} \right)^l \left(\frac{R_E}{X_j} \right)^{l+1} (2 - \delta_{0m}) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{lm}(\cos \theta) P_{lm}(\cos \theta_j) \\ &\quad \cdot (\cos m\lambda_j \cos m\lambda + \sin m\lambda_j \sin \lambda) \\ &= -\frac{GM_E}{X} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{R_E}{X} \right)^l P_{lm}(\cos \theta) (\Delta C_{lm} \cos m\lambda + \Delta S_{lm} \sin m\lambda) \end{aligned} \quad (4.38)$$

mit den Änderungen in den Potentialkoeffizienten

$$\begin{Bmatrix} \Delta C_{lm} \\ \Delta S_{lm} \end{Bmatrix} = k_{lm} \frac{M_j}{M_E} \left(\frac{R_E}{X_j} \right)^{l+1} (2 - \delta_{0m}) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{lm}(\cos \theta_j) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda_j \\ \sin m\lambda_j \end{Bmatrix} \quad (4.39)$$

für jeden betrachteten, gezeitenerzeugenden Körper j . Die Gesamtänderung wird aus der Summe aller Einzeländerungen berechnet

$$\begin{Bmatrix} \Delta C_{lm,ges} \\ \Delta S_{lm,ges} \end{Bmatrix} = \sum_j \begin{Bmatrix} \Delta C_{lm} \\ \Delta S_{lm} \end{Bmatrix}. \quad (4.40)$$

Gleichung (4.39) ist identisch mit Gleichung (6.6) der IERS Conventions 2010

$$\Delta \bar{C}_{lm} - i \Delta \bar{S}_{lm} = \frac{k_{lm}}{2l+1} \sum_j \frac{GM_j}{GM_E} \left(\frac{R_E}{X_j} \right)^{l+1} \bar{P}_{lm}(\sin \Phi_j) e^{-im\lambda_j} \quad (4.41)$$

mit der geografischen Breite Φ_j der gezeitenerzeugenden Körper [Petit und Luzum, 2010]. Die normierten Potentialkoeffizienten und Legendre-Polynome können mit Gleichung (4.31) und

$$\bar{P}_{lm} = \sqrt{\frac{(l-m)!(2l+1)(2-\delta_{0m})}{(n+m)!}} P_{lm} \quad (4.42)$$

in unnormierte umgerechnet werden. Mit $\sin \Phi_j = \cos \theta_j$ und $e^{-im\lambda_j} = \cos m\lambda_j - i \sin m\lambda_j$ folgt

$$\Delta C_{lm} - i \Delta S_{lm} = (2 - \delta_{0m}) k_{lm} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \sum_j \frac{M_j}{M_E} \left(\frac{R_E}{X_j} \right)^{l+1} P_{lm}(\cos \theta_j) (\cos m\lambda_j - i \sin m\lambda_j) \quad (4.43)$$

und

$$\begin{Bmatrix} \Delta C_{lm} \\ \Delta S_{lm} \end{Bmatrix} = (2 - \delta_{0m}) k_{lm} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \sum_j \frac{M_j}{M_E} \left(\frac{R_E}{X_j} \right)^{l+1} P_{lm}(\cos \theta_j) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda_j \\ \sin m\lambda_j \end{Bmatrix}, \quad (4.44)$$

analog zu den kombinierten Gleichungen (4.39) und (4.40).

Die Änderungen der Schwerefeldkoeffizienten werden in dieser Arbeit nur für Grad 2 betrachtet, da dieser mit 98 % den Großteil des gesamten Gezeitenpotentials enthält [Torge, 2001]. Die einzelnen Grad-2-Koeffizienten berechnen sich in Kugel- und kartesischen Koordinaten zu

$$\begin{aligned} \Delta C_{20} &= \frac{M_j}{M_E} \left(\frac{R_E}{\hat{X}_j} \right)^3 \frac{k_{20}}{2} (3 \cos^2 \hat{\theta}_j - 1) \\ &= \frac{M_j}{M_E} \left(\frac{R_E}{\hat{X}_j} \right)^3 \frac{k_{20}}{2} \frac{-\hat{x}_j^2 - \hat{y}_j^2 + 2\hat{z}_j^2}{\hat{X}_j^2}, \end{aligned} \quad (4.45a)$$

$$\begin{aligned} \Delta C_{21} &= \frac{M_j}{M_E} \left(\frac{R_E}{\hat{X}_j} \right)^3 k_{21} \sin \hat{\theta}_j \cos \hat{\theta}_j \cos \hat{\lambda}_j \\ &= \frac{M_j}{M_E} \left(\frac{R_E}{\hat{X}_j} \right)^3 k_{21} \frac{\hat{x}_j \hat{z}_j}{\hat{X}_j^2}, \end{aligned} \quad (4.45b)$$

$$\begin{aligned} \Delta S_{21} &= \frac{M_j}{M_E} \left(\frac{R_E}{\hat{X}_j} \right)^3 k_{21} \sin \hat{\theta}_j \cos \hat{\theta}_j \sin \hat{\lambda}_j \\ &= \frac{M_j}{M_E} \left(\frac{R_E}{\hat{X}_j} \right)^3 k_{21} \frac{\hat{y}_j \hat{z}_j}{\hat{X}_j^2}, \end{aligned} \quad (4.45c)$$

$$\begin{aligned} \Delta C_{22} &= \frac{M_j}{M_E} \left(\frac{R_E}{\hat{X}_j} \right)^3 \frac{k_{22}}{4} \sin^2 \hat{\theta}_j \cos 2\hat{\lambda}_j \\ &= \frac{M_j}{M_E} \left(\frac{R_E}{\hat{X}_j} \right)^3 \frac{k_{22}}{4} \frac{\hat{x}_j^2 - \hat{y}_j^2}{\hat{X}_j^2}, \end{aligned} \quad (4.45d)$$

$$\begin{aligned} \Delta S_{22} &= \frac{M_j}{M_E} \left(\frac{R_E}{\hat{X}_j} \right)^3 \frac{k_{22}}{4} \sin^2 \hat{\theta}_j \sin 2\hat{\lambda}_j \\ &= \frac{M_j}{M_E} \left(\frac{R_E}{\hat{X}_j} \right)^3 \frac{k_{22}}{2} \frac{\hat{x}_j \hat{y}_j}{\hat{X}_j^2}. \end{aligned} \quad (4.45e)$$

Die Erde ist kein perfekt elastischer Körper und die Reaktion des Erdkörpers erfolgt nicht genau im Moment der auftretenden Gezeitenkräfte. Die Anelastizität des Mantel- und Lithosphärenmaterials, aufgrund von inneren Reibungen, verursacht eine Zeitverzögerung τ_{lm} der elastischen Reaktion. Die Änderungen in den Potentialkoeffizienten $\Delta K_{lm}^E = \Delta K_{lm}^E(t)$ zum Zeitpunkt t sind gleich der angenommenen instantanen Änderung in den Koeffizienten $\Delta K_{lm}^E(\hat{t})$ zum Zeitpunkt $\hat{t} = t - \tau_{lm}$ mit dem zugehörigen Positionsvektor $\hat{\mathbf{x}}_j(\hat{t}) = \mathbf{x}_j(t - \tau_{lm})$ des gezeitenerregenden Körpers (Abbildung 4.10).

Die Berechnung des Vektors $\hat{\mathbf{x}}_j$ kann in zwei Komponenten unterteilt werden. In der Zeit τ_{lm} bewegt sich der gezeitenerzeugende Körper, gleichzeitig ändert sich die geozentrische Länge des Körpers durch die rotierende Erde mit der Rotationsgeschwindigkeit $\hat{\Omega}_E$. Der von Ordnung m abhängige, zeitverzögerte Vektor berechnet sich zu

$$\hat{\mathbf{x}}_j = \mathbf{R}_z(-\hat{\Omega}_E \tau_{lm}) \mathbf{x}_j(t - \tau_{lm}). \quad (4.46)$$

Für den Entwicklungsgrad 2 ergeben sich drei Zeitverzögerungen, τ_{20} , τ_{21} und τ_{22} , die beispielsweise in der Berechnung der DE421-Ephemeride Verwendung finden [Williams u. a., 2008]. In der Berechnung der DE430-Ephemeride [Williams u. a., 2013] werden die τ_{lm} weiter in Orbitverzögerungen τ_{lm} und Rotationsverzögerungen τ'_{lm} unterteilt, mit

$$\hat{\mathbf{x}}_j = \mathbf{R}_z(-\dot{\Omega}_E \tau'_{lm}) \mathbf{x}_j(t - \tau_{lm}) . \quad (4.47)$$

Die zonalen Gezeiten sind nach Gleichung (4.45a) nicht von der Erdrotation und damit nicht von λ_j abhängig. Dementsprechend ist der Wert der zonalen Rotationsverzögerung $\tau'_{20} = 0$. Die verbleibenden fünf Zeitverzögerungen τ_{20} , τ_{21} , τ_{22} , τ'_{21} und τ'_{22} wurden für diese Arbeit in LUNAR implementiert, die Rotationsverzögerungen können in der Parameterschätzung mitbestimmt werden (Kapitel 5.6).

In der numerischen Integration der Ephemeridenberechnung liegen zu jedem Berechnungsschritt nur die Zustandsvektoren (Beschleunigungen, Geschwindigkeiten und Positionen) zum Zeitpunkt t vor. Die zeitverzögerten Positionen der gezeitenerregenden Körper $\hat{\mathbf{x}}_j$ müssen zum Zeitpunkt $t - \tau_{lm}$ approximiert werden. Die Rotation des Positionsvektors um \mathbf{R}_z kann zu einem beliebigen Zeitpunkt berechnet werden und ist unabhängig von der Integration der Ephemeriden. Der zeitverzögerte Positionsvektor muss jedoch parallel zur Integration bestimmt werden. Manche [2011] beschreibt verschiedene Methoden zur Abschätzung der zeitverzögerten Positionen. In dieser Arbeit wird aus dem Zustandsvektor zum Zeitpunkt t über einen quadratischen Ansatz die Position zum Zeitpunkt $t - \tau_{lm}$ bestimmt

$$\mathbf{x}_j(t - \tau_{lm}) = \mathbf{x}_j(t) - \dot{\mathbf{x}}_j(t) \tau_{lm} + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{x}}_j(t) \tau_{lm}^2 . \quad (4.48)$$

Der Zuschlag zum C_{20} -Potentialkoeffizient in Gleichung (4.45a) enthält den kompletten Anteil der Deformation der festen Erde mit der permanenten Deformation. Diese ist bereits im statischen zero-tide Wert für C_{20} berücksichtigt und muss aus Gleichung (4.45a) wieder subtrahiert werden. Nach Petit und Luzum [2010] berechnet sich der Anteil der permanenten Deformation zu

$$\Delta C_{20}^{perm} = \sqrt{5} A_0 H_0 k_{20} = \sqrt{5} (4.4228 \cdot 10^{-8}) (-0.3146) k_{20} , \quad (4.49)$$

mit Änderung des C_{20}^{zt} zero-tide Koeffizienten

$$\Delta C_{20}^{zt} = \Delta C_{20} - \Delta C_{20}^{perm} . \quad (4.50)$$

Die neue Modellierung der festen Erdgezeiten in Form von Variationen in den Potentialkoeffizienten hat den Vorteil, dass sämtliche auftretenden Kräfte (Abschnitt 4.2.2 und 4.2.3) automatisch mit

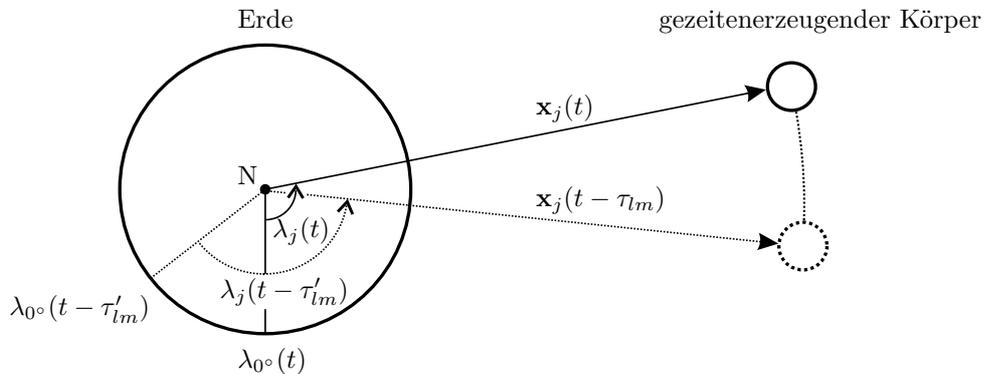


Abb. 4.10: Geozentrischer Positions- und Längenunterschied des gezeitenerregenden Körpers durch die verzögerte Reaktion der Erde auf die Gezeitenkräfte mit Orbitverzögerung τ_{lm} und Rotationsverzögerung τ'_{lm} . N bezeichnet den geografischen Nordpol, λ_0° die Lage des Nullmeridians.

berücksichtigt werden. In Kapitel 5.6 wird der Effekt auf die mitgeschätzten Zeitverzögerungen und das Ergebnis der Datenanalyse untersucht.

Die folgende Herleitung von Gleichung (4.33) zeigt die bisherigen Vereinfachungen, die in dieser Arbeit ersetzt wurden. Ausgehend von Gleichung (4.38) ergibt sich das gezeitenerzeugte Deformationspotential vom Grad 2 für alle Ordnungen $m = 0, 1, 2$ zu

$$\begin{aligned} V_{d,C_{20}}(X) &= -\frac{GM_E R_E^2}{X^3} \Delta C_{20} \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \\ &= -\frac{1}{2} GM_E R_E^2 \Delta C_{20} \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{X^5}, \end{aligned} \quad (4.51a)$$

$$\begin{aligned} V_{d,C_{21}S_{21}}(X) &= -\frac{GM_E R_E^2}{X^3} 3 \sin \theta \cos \theta (\Delta C_{21} \cos \lambda + \Delta S_{21} \sin \lambda) \\ &= -3GM_E R_E^2 \left(\Delta C_{21} \frac{xz}{X^5} + \Delta S_{21} \frac{yz}{X^5} \right), \end{aligned} \quad (4.51b)$$

$$\begin{aligned} V_{d,C_{22}S_{22}}(X) &= -\frac{GM_E R_E^2}{X^3} 3 \sin^2 \theta \left(\Delta C_{22} (\cos^2 \lambda - \sin^2 \lambda) + 2\Delta S_{22} \sin \lambda \cos \lambda \right) \\ &= -3GM_E R_E^2 \left(\Delta C_{22} \frac{x^2 - y^2}{X^5} + 2\Delta S_{22} \frac{xy}{X^5} \right). \end{aligned} \quad (4.51c)$$

Durch Gradientenbildung und Einsetzen der Gleichungen (4.45) erhält man die resultierenden Gezeitenbeschleunigungen eines Körpers (zum Beispiel des Mondes) an der Position \mathbf{x} , hervorgerufen durch den gezeitenerzeugenden Körper j

$$\ddot{\mathbf{x}}_{d,C_{20}} = \frac{3}{2} \frac{GM_j}{X^7} \left(\frac{R_E}{\hat{X}_j} \right)^5 \frac{k_{20}}{2} (2\hat{z}_j^2 - \hat{x}_j^2 - \hat{y}_j^2) \begin{pmatrix} x(x^2 + y^2 - 4z^2) \\ y(x^2 + y^2 - 4z^2) \\ z(3x^2 + 3y^2 - 2z^2) \end{pmatrix}, \quad (4.52a)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_{d,C_{21}S_{21}} = \frac{3}{2} \frac{GM_j}{X^7} \left(\frac{R_E}{\hat{X}_j} \right)^5 k_{21} \left[2\hat{x}_j \hat{z}_j \begin{pmatrix} z(-4x^2 + y^2 + z^2) \\ -5xyz \\ x(x^2 + y^2 - 4z^2) \end{pmatrix} + 2\hat{y}_j \hat{z}_j \begin{pmatrix} -5xyz \\ z(x^2 - 4y^2 + z^2) \\ y(x^2 + y^2 - 4z^2) \end{pmatrix} \right], \quad (4.52b)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_{d,C_{22}S_{22}} = \frac{3}{2} \frac{GM_j}{X^7} \left(\frac{R_E}{\hat{X}_j} \right)^5 k_{22} \left[\frac{\hat{x}_j^2 - \hat{y}_j^2}{2} \begin{pmatrix} x(-3x^2 + 7y^2 + 2z^2) \\ y(-7x^2 + 3y^2 - 2z^2) \\ -5z(x^2 - y^2) \end{pmatrix} + \hat{x}_j \hat{y}_j \begin{pmatrix} y(-8x^2 + 2y^2 + 2z^2) \\ x(2x^2 - 8y^2 + 2z^2) \\ -10xyz \end{pmatrix} \right]. \quad (4.52c)$$

Bei Verwendung von Gleichung (4.52) ist zu beachten, dass darin der komplette Gezeitenanteil enthalten ist. Für die Berechnung der Kräfte, und daraus resultierenden Beschleunigungen, zwischen dem Erdschwerefeld und dem Mond als Punktmasse in Kapitel 4.2.2 muss der tide-free Wert für den C_{20} -Term der Erde verwendet werden

$$C_{20}^{tf} = C_{20}^{zt} - \Delta C_{20}^{perm}, \quad (4.53)$$

um die permanente Deformation nicht doppelt zu berücksichtigen. Die Wechselwirkung mit allen anderen Körpern im Sonnensystem erfolgt weiterhin mit dem zero-tide Wert C_{20}^{zt} .

Durch Verwendung von Zylinderkoordinaten mit $\mathbf{x} = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{z} = (x, y, 0)^T + (0, 0, z)^T$ und analog $\hat{\mathbf{x}}_j = \hat{\boldsymbol{\rho}}_j + \hat{\mathbf{z}}_j$ ergibt sich

$$\ddot{\mathbf{x}}_{d,C_{20}} = \frac{3}{2} \frac{GM_j R_E^5}{X^5} \frac{k_{20}}{\hat{X}_j^5} \left(2\hat{z}_j^2 \mathbf{z} + \hat{\rho}_j^2 \boldsymbol{\rho} + \hat{X}_j^2 \mathbf{x} - \frac{5(\frac{1}{2}\rho^2 \hat{\rho}_j^2 + z^2 \hat{z}_j^2) \mathbf{x}}{X^2} \right), \quad (4.54a)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_{d,C_{21}S_{21}} = \frac{3}{2} \frac{GM_j R_E^5}{X^5} \frac{k_{21}}{\hat{X}_j^5} \left(2[(\boldsymbol{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}_j)\hat{\mathbf{z}}_j + z\hat{z}_j\hat{\boldsymbol{\rho}}_j] - \frac{10z\hat{z}_j(\boldsymbol{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}_j)\mathbf{x}}{X^2} \right), \quad (4.54b)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_{d,C_{22}S_{22}} = \frac{3}{2} \frac{GM_j R_E^5}{X^5} \frac{k_{22}}{\hat{X}_j^5} \left(2(\boldsymbol{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}_j)\hat{\boldsymbol{\rho}}_j - \hat{\rho}_j^2 \boldsymbol{\rho} - \frac{5[(\boldsymbol{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}_j)^2 - \frac{1}{2}\rho^2\hat{\rho}_j^2]\mathbf{x}}{X^2} \right). \quad (4.54c)$$

Bis auf den fehlenden Vorfaktor $(M_E + M_M)/M_E$ entspricht die Summe der Gleichungen (4.54) der in der DE430-Ephemeride verwendeten Formulierung [Folkner u. a., 2014]. Der Vorfaktor tritt auf, wenn, wie in der DE430-Ephemeride, der Erde-Mond-Beschleunigungsvektor mit $\ddot{x}_{EM} = \ddot{x}_M - \ddot{x}_E$ betrachtet wird. Vernachlässigt man die Abhängigkeit der Potential-Lovezahl und der Zeitverzögerung der Gezeitenreaktion von der Ordnung des gezeitenerzeugenden Potentials, $k_{20} = k_{21} = k_{22} = k_2$ und $\tau_{20} = \tau_{21} = \tau_{22} = \tau'_{21} = \tau'_{22} = \tau_2$ folgt

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}_d = \frac{3}{2} \frac{GM_j R_E^5}{X^5} \frac{k_2}{\hat{X}_j^5} & \left(2\hat{z}_j^2 \mathbf{z} + \hat{X}_j^2 \mathbf{x} - \frac{5(z^2\hat{z}_j^2)\mathbf{x}}{X^2} \right. \\ & + 2[(\boldsymbol{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}_j)\hat{\mathbf{z}}_j + z\hat{z}_j\hat{\boldsymbol{\rho}}_j] - \frac{10z\hat{z}_j(\boldsymbol{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}_j)\mathbf{x}}{X^2} \\ & \left. + 2(\boldsymbol{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}_j)\hat{\boldsymbol{\rho}}_j - \frac{5(\boldsymbol{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}_j)^2\mathbf{x}}{X^2} \right). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Wird nur der Mond als gezeitenerzeugender und gleichzeitig als von den Erdgezeiten gestörter Körper betrachtet, die Bewegung des Mondes während der Zeitverzögerung τ_2 vernachlässigt und für kleine Werte von τ_2 die Vereinfachung $\boldsymbol{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}_j \approx \rho^2$ gewählt, gilt $\mathbf{z} = \hat{\mathbf{z}}_j$, $|\boldsymbol{\rho}| = |\hat{\boldsymbol{\rho}}_j|$ und $X = \hat{X}_j = X_{EM}$ und

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}_d &= \frac{3}{2} \frac{GM_M R_E^5}{X^{10}} k_2 \left(-5z^4 \frac{\mathbf{x}}{X^2} - 10z^2 \rho^2 \frac{\mathbf{x}}{X^2} - 5\rho^4 \frac{\mathbf{x}}{X^2} + X^2 \mathbf{x} + 2z^2 \mathbf{z} + 2\rho^2 \mathbf{z} + 2z^2 \hat{\boldsymbol{\rho}}_j + 2\rho^2 \hat{\boldsymbol{\rho}}_j \right) \\ &= \frac{3}{2} \frac{GM_M R_E^5}{X^{10}} k_2 \left(-5 \frac{\mathbf{x}}{X^2} (z^2 + \rho^2)^2 + X^2 \mathbf{x} + 2X^2 (\mathbf{z} + \hat{\boldsymbol{\rho}}_j) \right) \\ &= 3 \frac{GM_M R_E^5}{X_{EM}^8} k_2 (\hat{\mathbf{x}}_j - 2\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Der Vektor $\hat{\mathbf{x}}_j$ ist mit \mathbf{x} über eine mathematisch positive Drehung um die Erdrotation (z-Achse) mit dem Winkel $\delta = \tau_2 \Omega_E$ verbunden. Für kleine Winkel δ gilt

$$\hat{\mathbf{x}}_j = \begin{pmatrix} 1 & -\delta & 0 \\ \delta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad (4.57)$$

womit sich, bis auf den Vorfaktor $(1 + M_M/M_E) = (M_E + M_M)/M_E$, Gleichung (4.33) aus der bislang genutzten Programmversion ergibt

$$\ddot{\mathbf{x}}_d = -3 \frac{GM_M R_E^5}{X_{EM}^8} k_2 \begin{pmatrix} x + \delta y \\ y - \delta x \\ z \end{pmatrix}. \quad (4.58)$$

4.3 Rotation des Mondes

Die Modellierung der Mondrotation nach Bauer [1989] basiert im wesentlichen auf den Arbeiten von Ferrari u. a. [1980] und Cappallo [1980]. Die Hauptträgheitsmomente des Mondes A , B und C wurden um elastische Anteile modifiziert, wodurch die Berechnung des Rotationsvektors $\boldsymbol{\omega}$ (Gleichung (2.7)) vereinfacht werden konnte. Die Deformation des Mondes durch Gezeiten verändert alle Elemente des Trägheitstensors und wurde nur in der Euler-Liouville Gleichung für die Mondrotation angebracht. Eine zeitliche Veränderung der Potentialkoeffizienten durch Gezeitenwirkungen und daraus folgende zusätzliche Effekte auf die Translationsbewegung und Kopplungen mit dem Erdschwerefeld wurden nicht berücksichtigt. Für eine konsistentere Beschreibung der Mondrotation und Berücksichtigung der Effekte des zeitvariablen Schwerefeldes vom Grad 2 auf die Translation und Rotation des Mondes wurde eine neue Modellierung implementiert, die auf der DE430-Ephemeride [Folkner u. a., 2014] basiert.

Die neue Modellierung ermöglicht es, den Mond als 2-Schichten-Körper mit festem Mantel und flüssigem Kern zu modellieren. Die zusätzlichen Effekte eines möglichen inneren festen Kerns [Dumberry und Wicczorek, 2016] werden nicht berücksichtigt. Der Index M bezieht sich auf den gesamten Mond, der Index m auf den Mantel und der Index c auf den Kern. Wird in der Berechnung kein Kern verwendet, gelten Variablen mit dem Index m für den gesamten Mond.

Die Änderung der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ eines Körpers mit dem Trägheitstensor \mathbf{I} , ist mit dem auf den Körper wirkenden Drehmoment \mathbf{T} im mitrotierenden System über

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \\ &= \dot{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}\end{aligned}\quad (4.59)$$

verbunden. Auf den Mantel des Mondes wirken äußere Drehmomente T_{grav} durch die Gravitationswechselwirkung mit anderen Körpern des Sonnensystems sowie innere Drehmomente T_{cmb} durch die Kopplung mit dem Kern an der Kern-Mantel-Grenze (CMB). Der Trägheitstensor des Mantels wird durch Gezeitendeformationen zu einer zeitabhängigen Größe $\mathbf{I}(t)$. Für die Änderung des Winkelgeschwindigkeitsvektors des Mondmantels im Mantel-Bezugssystem gilt

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_m = \mathbf{I}_m^{-1}(t) \left(\mathbf{T}_{grav} + \mathbf{T}_{cmb} - \dot{\mathbf{I}}_m(t)\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_m \times \mathbf{I}_m(t)\boldsymbol{\omega}_m \right). \quad (4.60)$$

Die CMB ist bezüglich des Mondmantels fest, sodass der Trägheitstensor des Kerns \mathbf{I}_c im Mantel-Bezugssystem konstant ist. Der Rotationsvektor des Kerns $\boldsymbol{\omega}_c$ muss nicht parallel zum Mantelrotationsvektor liegen [Williams u. a., 2001]. Auf den flüssigen Kern wirkt nur das Drehmoment an der CMB, sodass für die Änderung der Winkelgeschwindigkeit des Kerns im Mantel-Bezugssystem gilt

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_c = -\mathbf{I}_c^{-1} (\mathbf{T}_{cmb} + \boldsymbol{\omega}_m \times \mathbf{I}_c\boldsymbol{\omega}_c). \quad (4.61)$$

Das Drehmoment an der CMB wird ebenfalls im Mantel-Bezugssystem über

$$\mathbf{T}_{cmb} = K_v(\boldsymbol{\omega}_c - \boldsymbol{\omega}_m) + (C_c - A_c)(\mathbf{u}_{mz} \cdot \boldsymbol{\omega}_c)(\mathbf{u}_{mz} \times \boldsymbol{\omega}_c) \quad (4.62)$$

berechnet. K_v beschreibt die Kopplungskonstante zwischen Kern und Mantel, A_c und C_c die beiden Hauptträgheitsmomente des Kerns (Gleichung (4.75)) und \mathbf{u}_{mz} den Einheitsvektor in z-Richtung des Mantel-Bezugssystems. Der erste Summand beschreibt die Kopplung eines kugelförmigen Kerns, der zweite Summand erweitert das Modell um eine mögliche Abplattung der CMB.

Für die Berechnung des Trägheitstensors geht man von den ungestörten tide-free Hauptträgheitsmomenten aus. Der Trägheitstensor des Mondes nimmt eine diagonale Gestalt an

$$\mathbf{I}_M^{tf} = \begin{pmatrix} A_M^{tf} & 0 & 0 \\ 0 & B_M^{tf} & 0 \\ 0 & 0 & C_M^{tf} \end{pmatrix}. \quad (4.63)$$

Die Hauptträgheitsmomente A_M^{tf} , B_M^{tf} und C_M^{tf} können aus den tide-free Potentialkoeffizienten des Grades 2, C_{20}^{tf} und C_{22}^{tf} , sowie den relativen Differenzen der Trägheitsmomente, auch als dynamische Abplattungen bezeichnet, β_M^{tf} und γ_M^{tf} mit

$$\beta_M^{tf} = \frac{C_M^{tf} - A_M^{tf}}{B_M^{tf}}, \quad (4.64)$$

$$\gamma_M^{tf} = \frac{B_M^{tf} - A_M^{tf}}{C_M^{tf}} \quad (4.65)$$

berechnet werden. Die dritte Differenz in den Trägheitsmomenten ist

$$\alpha_M^{tf} = \frac{C_M^{tf} - B_M^{tf}}{A_M^{tf}}, \quad (4.66)$$

wobei die Differenzen über

$$\alpha_M^{tf} - \beta_M^{tf} + \gamma_M^{tf} = \alpha_M^{tf} \beta_M^{tf} \gamma_M^{tf} \quad (4.67)$$

voneinander abhängen. Im verwendeten Hauptachsensystem gilt weiterhin $C_{21}^{tf} = S_{21}^{tf} = S_{22}^{tf} = 0$. Die Potentialkoeffizienten vom Grad 2 sind mit den Trägheitsmomenten über

$$C_{20}^{tf} = -\frac{2C_M^{tf} - (A_M^{tf} + B_M^{tf})}{2M_M R_M^2}, \quad (4.68)$$

$$C_{22}^{tf} = \frac{B_M^{tf} - A_M^{tf}}{4M_M R_M^2} \quad (4.69)$$

verbunden. Damit kann das normierte polare Trägheitsmoment über zwei Wege berechnet werden [Bills, 1995]

$$\frac{C_M^{tf}}{M_M R_M^2} = \frac{4C_{22}^{tf}}{\gamma_M^{tf}}, \quad (4.70a)$$

$$\frac{C_M^{tf}}{M_M R_M^2} = \frac{-2C_{20}^{tf} (1 + \beta_M^{tf})}{2\beta_M^{tf} - \gamma_M^{tf} + \beta_M^{tf} \gamma_M^{tf}}. \quad (4.70b)$$

Der Wert für C_{20}^{tf} wird aus der GRAIL-kompatiblen DE430-Ephemeride auf einen konstanten Wert fixiert. Im Gegensatz zur DE430 wird in dieser Arbeit aus LLR-Daten nicht β_M^{tf} und γ_M^{tf} , sondern β_M^{tf} und C_{22}^{tf} geschätzt und γ_M^{tf}

$$\gamma_M^{tf} = \frac{4\beta_M^{tf} C_{22}^{tf}}{-C_{20}^{tf} (1 + \beta_M^{tf}) + 2C_{22}^{tf} (1 - \beta_M^{tf})} \quad (4.71)$$

aus den Gleichungen (4.70) abgeleitet. Die Hauptträgheitsmomente in Gleichung (4.63) werden über

$$A_M^{tf} = \frac{-2C_{20}^{tf} (1 - \beta_M^{tf} \gamma_M^{tf})}{2\beta_M^{tf} - \gamma_M^{tf} + \beta_M^{tf} \gamma_M^{tf}} M_M R_M^2, \quad (4.72)$$

$$B_M^{tf} = \frac{-2C_{20}^{tf} (1 + \gamma_M^{tf})}{2\beta_M^{tf} - \gamma_M^{tf} + \beta_M^{tf} \gamma_M^{tf}} M_M R_M^2, \quad (4.73)$$

$$C_M^{tf} = \frac{-2C_{20}^{tf} (1 + \beta_M^{tf})}{2\beta_M^{tf} - \gamma_M^{tf} + \beta_M^{tf} \gamma_M^{tf}} M_M R_M^2 \quad (4.74)$$

berechnet. Der Trägheitstensor des gesamten Mondes besteht aus einem Kernanteil \mathbf{I}_c und einen Mantelanteil \mathbf{I}_m^{tf} . Der Trägheitstensor des Kerns \mathbf{I}_c ist durch die CMB vorgegeben und wird im Mantel-Bezugsrahmen als konstant und nicht deformierbar betrachtet. Die Form der CMB wird über die Abplattung $f_c = (a_c - b_c)/a_c$ mit den Äquatorradius a_c und Polradius b_c des Kerns beschrieben. Mit dem Verhältnis $m_c = C_c/C_M^{tf}$ zwischen dem polaren Trägheitsmoment des Kerns C_c und dem polaren Moment des gesamten Mondes gilt

$$\mathbf{I}_c = \begin{pmatrix} m_c(1 - f_c)C_M^{tf} & 0 & 0 \\ 0 & m_c(1 - f_c)C_M^{tf} & 0 \\ 0 & 0 & m_c C_M^{tf} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_c & 0 & 0 \\ 0 & A_c & 0 \\ 0 & 0 & C_c \end{pmatrix}. \quad (4.75)$$

Der undeformierte Trägheitstensor des Mantels ergibt sich damit zu

$$\mathbf{I}_m^{tf} = \mathbf{I}_M^{tf} - \mathbf{I}_c. \quad (4.76)$$

Der Einfluss der Gezeiten und der Rotation verformt den Mond, der Mantel-Trägheitstensor wird zu einer zeitabhängigen Größe $\mathbf{I}_m(t)$. Als gezeitenerzeugender Körper wird in dieser Arbeit nur die Erde als Quelle der größten Deformation betrachtet (Kapitel 4.1.3). Für die Modellierung der elastischen Eigenschaften des Mondmantels wird eine einzelne, von der Ordnung des Gezeitenpotentials unabhängige, Potential-Lovezahl k_2^M verwendet, die auf den Wert der DE430-Ephemeride mit $k_2^M = 0.024059$ in der Auswertung fixiert ist. Die dissipativen Eigenschaften des Mantelmaterials werden durch einen einzelnen Parameter τ_m modelliert, der die Zeitverzögerung der elastischen Reaktion auf äußere Kräfte beschreibt. Analog zu Kapitel 4.2.5 muss der Positionsvektor der Erde $\hat{\mathbf{x}}_E$ mit den Komponenten $\hat{x}_E, \hat{y}_E, \hat{z}_E$ im HAS des Mondes zur Zeit $t - \tau_m$ verwendet werden. Für den Rotationsanteil der Deformation wird ebenfalls der Rotationsvektor des Mondmantels $\hat{\boldsymbol{\omega}}_m$ mit den Komponenten $\hat{\omega}_{mx}, \hat{\omega}_{my}, \hat{\omega}_{mz}$ im HAS zur Zeit $t - \tau_m$ in der Berechnung genutzt. $\mathbf{I}_m(t)$ berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_m(t) &= \mathbf{I}_m^{tf} + \Delta \mathbf{I} \\ &= \mathbf{I}_m^{tf} - k_2^M M_E \left(\frac{R_M}{\hat{X}_E} \right)^5 \begin{pmatrix} \hat{x}_E^2 - \frac{1}{3} \hat{X}_E^2 & \hat{x}_E \hat{y}_E & \hat{x}_E \hat{z}_E \\ \hat{x}_E \hat{y}_E & \hat{y}_E^2 - \frac{1}{3} \hat{X}_E^2 & \hat{y}_E \hat{z}_E \\ \hat{x}_E \hat{z}_E & \hat{y}_E \hat{z}_E & \hat{z}_E^2 - \frac{1}{3} \hat{X}_E^2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{k_2^M R_M^5}{3G} \begin{pmatrix} \hat{\omega}_{mx}^2 - \frac{1}{3} (\hat{\boldsymbol{\omega}}_m - n)^2 & \hat{\omega}_{mx} \hat{\omega}_{my} & \hat{\omega}_{mx} \hat{\omega}_{mz} \\ \hat{\omega}_{mx} \hat{\omega}_{my} & \hat{\omega}_{my}^2 - \frac{1}{3} (\hat{\boldsymbol{\omega}}_m - n)^2 & \hat{\omega}_{my} \hat{\omega}_{mz} \\ \hat{\omega}_{mx} \hat{\omega}_{mz} & \hat{\omega}_{my} \hat{\omega}_{mz} & \hat{\omega}_{mz}^2 - \frac{1}{3} (\hat{\boldsymbol{\omega}}_m + 2n)^2 \end{pmatrix}, \quad (4.77) \end{aligned}$$

mit dem Betrag des Abstandes zwischen Mond und Erde \hat{X}_E und der mittleren siderischen Winkelgeschwindigkeit n des Mondes [Bauer, 1989; Folkner u. a., 2014]. Analog zu Newhall und Williams [1997] verbleibt der von n hervorgerufene konstante Anteil der Rotationsdeformation im statischen

tide-free Anteil des Trägheitstensors und muss aus $\mathbf{I}_m(t)$ herausgerechnet werden. Aus Gleichung (4.77) folgt für die Änderungsrate des Manteltensors

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{I}}_m(t) = & 5k_2^M M_E \frac{R_M^5 \hat{\mathbf{x}}_E \cdot \dot{\hat{\mathbf{x}}}_E}{\hat{X}_E^7} \begin{pmatrix} \hat{x}_E^2 - \frac{1}{3} \hat{X}_E^2 & \hat{x}_E \hat{y}_E & \hat{x}_E \hat{z}_E \\ \hat{x}_E \hat{y}_E & \hat{y}_E^2 - \frac{1}{3} \hat{X}_E^2 & \hat{y}_E \hat{z}_E \\ \hat{x}_E \hat{z}_E & \hat{y}_E \hat{z}_E & \hat{z}_E^2 - \frac{1}{3} \hat{X}_E^2 \end{pmatrix} \\ & - k_2^M M_E \left(\frac{R_M}{\hat{X}_E} \right)^5 \begin{pmatrix} 2 \left(\hat{x}_E \dot{\hat{x}}_E - \frac{1}{3} \hat{\mathbf{x}}_E \cdot \dot{\hat{\mathbf{x}}}_E \right) & \hat{x}_E \dot{\hat{y}}_E + \dot{\hat{x}}_E \hat{y}_E & \hat{x}_E \dot{\hat{z}}_E + \dot{\hat{x}}_E \hat{z}_E \\ \hat{x}_E \dot{\hat{y}}_E + \dot{\hat{x}}_E \hat{y}_E & 2 \left(\hat{y}_E \dot{\hat{y}}_E - \frac{1}{3} \hat{\mathbf{x}}_E \cdot \dot{\hat{\mathbf{x}}}_E \right) & \hat{y}_E \dot{\hat{z}}_E + \dot{\hat{y}}_E \hat{z}_E \\ \hat{x}_E \dot{\hat{z}}_E + \dot{\hat{x}}_E \hat{z}_E & \hat{y}_E \dot{\hat{z}}_E + \dot{\hat{y}}_E \hat{z}_E & 2 \left(\hat{z}_E \dot{\hat{z}}_E - \frac{1}{3} \hat{\mathbf{x}}_E \cdot \dot{\hat{\mathbf{x}}}_E \right) \end{pmatrix} \\ & + \frac{k_2^M R_M^5}{3G} \begin{pmatrix} 2 \left(\dot{\omega}_{mx} \dot{\omega}_{mx} - \frac{1}{3} (\dot{\boldsymbol{\omega}}_m \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_m) \right) & \dot{\omega}_{mx} \dot{\omega}_{my} + \dot{\omega}_{mx} \dot{\omega}_{my} & \dot{\omega}_{mx} \dot{\omega}_{mz} + \dot{\omega}_{mx} \dot{\omega}_{mz} \\ \dot{\omega}_{mx} \dot{\omega}_{my} + \dot{\omega}_{mx} \dot{\omega}_{my} & 2 \left(\dot{\omega}_{my} \dot{\omega}_{my} - \frac{1}{3} (\dot{\boldsymbol{\omega}}_m \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_m) \right) & \dot{\omega}_{my} \dot{\omega}_{mz} + \dot{\omega}_{my} \dot{\omega}_{mz} \\ \dot{\omega}_{mx} \dot{\omega}_{mz} + \dot{\omega}_{mx} \dot{\omega}_{mz} & \dot{\omega}_{my} \dot{\omega}_{mz} + \dot{\omega}_{my} \dot{\omega}_{mz} & 2 \left(\dot{\omega}_{mz} \dot{\omega}_{mz} - \frac{1}{3} (\dot{\boldsymbol{\omega}}_m \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_m) \right) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Der Positionsvektor $\hat{\mathbf{x}}_E$ zum Zeitpunkt $t - \tau_m$ wird analog zu Gleichung (4.48) über einen quadratischen Ansatz bestimmt. Der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\hat{\mathbf{x}}}_E$ sowie der Rotationsvektor $\dot{\boldsymbol{\omega}}_m$ wird über eine lineare Funktion zum Zeitpunkt $t - \tau_m$ berechnet

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_E = \dot{\hat{\mathbf{x}}}_E(t - \tau_m) = \dot{\hat{\mathbf{x}}}_E(t) - \ddot{\hat{\mathbf{x}}}_E(t) \tau_m, \quad (4.79)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_m = \dot{\boldsymbol{\omega}}_m(t - \tau_m) = \dot{\boldsymbol{\omega}}_m(t) - \ddot{\boldsymbol{\omega}}_m(t) \tau_m. \quad (4.80)$$

Die Änderung im Vektor $\dot{\boldsymbol{\omega}}_m$ zwischen den Zeitpunkten t und $t - \tau_m$ wird vernachlässigt, sodass in Gleichung (4.78) der Vektor $\dot{\boldsymbol{\omega}}_m(t)$ in die Berechnung eingeht. Die Orientierung des Mondes im inertialen System über die Eulerwinkel $\Phi = [\psi \vartheta \varphi]^T$ muss ebenfalls für den Zeitpunkt $t - \tau_m$ bestimmt werden. Mit der Geschwindigkeit der Eulerwinkel $\dot{\Phi} = [\dot{\psi} \dot{\vartheta} \dot{\varphi}]^T$ aus Gleichung (2.8) und der Beschleunigung der Eulerwinkel $\ddot{\Phi} = [\ddot{\psi} \ddot{\vartheta} \ddot{\varphi}]^T$ mit

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{\sin \vartheta} \left(\dot{\omega}_{mx} \sin \varphi + \dot{\omega}_{my} \cos \varphi + \dot{\vartheta} \dot{\varphi} - \dot{\psi} \dot{\vartheta} \cos \vartheta \right), \quad (4.81a)$$

$$\ddot{\vartheta} = \dot{\omega}_{mx} \cos \varphi - \dot{\omega}_{my} \sin \varphi - \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \vartheta, \quad (4.81b)$$

$$\ddot{\varphi} = \dot{\omega}_{mz} - \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\vartheta} \dot{\psi} \sin \vartheta \quad (4.81c)$$

[Bauer, 1989], kann ein quadratischer Ansatz

$$\hat{\Phi} = \Phi(t - \tau_m) = \Phi(t) - \dot{\Phi}(t) \tau_m + \frac{1}{2} \ddot{\Phi}(t) \tau_m^2 \quad (4.82)$$

für die Bestimmung von $\hat{\Phi}$ genutzt werden. Die zeiten- und rotationsbedingte Deformation des Trägheitstensors $\Delta \mathbf{I}$ verursacht eine zeitabhängige Variation des Grad-2 Gravitationsfeldes. Nach Lambeck [1988] berechnen sich die zeitlichen Änderungen der unnormierten Potentialkoeffizienten zu

$$\Delta C_{20}(t) = - \frac{2\Delta \mathbf{I}_{33}(t) - (\Delta \mathbf{I}_{11}(t) + \Delta \mathbf{I}_{22}(t))}{2M_M R_M^2}, \quad (4.83a)$$

$$\Delta C_{21}(t) = - \frac{\Delta \mathbf{I}_{13}(t)}{M_M R_M^2}, \quad (4.83b)$$

$$\Delta C_{22}(t) = \frac{\Delta \mathbf{I}_{22}(t) - \Delta \mathbf{I}_{11}(t)}{4M_M R_M^2}, \quad (4.83c)$$

$$\Delta S_{21}(t) = - \frac{\Delta \mathbf{I}_{23}(t)}{M_M R_M^2}, \quad (4.83d)$$

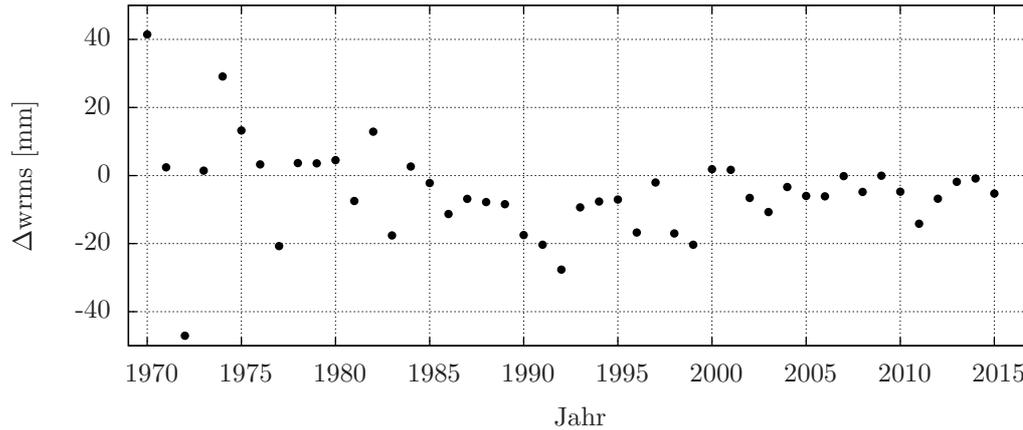


Abb. 4.11: Differenz des jährlichen wrms der 1-Weg-Residuen mit neuer Modellierung der Mondrotation zur bisherigen Programmversion.

$$\Delta S_{22}(t) = -\frac{\Delta \mathbf{I}_{12}(t)}{2M_M R_M^2} . \quad (4.83e)$$

Die Zuschläge zu den Potentialkoeffizienten werden in der Integration der Bewegungsgleichungen zu den tide-free-Werten addiert.

Mit der neuen Modellierung steht das zeitvariable Gravitationsfeld neben der Berechnung der Mondrotation auch für die Kopplung mit den anderen Körpern des Sonnensystems zur Verfügung (Kapitel 4.2). Abbildung 4.11 zeigt die Differenz des jährlichen 1-Weg-wrms zwischen der alten Modellierung nach Bauer [1989] und dieser Arbeit. Für einen Vergleich der Modelle wurde der Anteil des Mondkerns mit $m_c = 0$ nicht in die Berechnung einbezogen. Bis 1985 ist im Mittel keine Änderung des wrms zu erkennen. Durch die geringere Messgenauigkeit der älteren Daten können die Änderungen in diesem Zeitraum nicht aufgedeckt werden, einzig die Beträge der Residuen in den einzelnen Jahren wurden verändert. Die Verbesserung des Modells zeigt sich besonders in den genaueren LLR-Daten ab 1985. Im Mittel konnte der wrms ab 1985 um 8.1 mm reduziert werden, das entspricht einer relativen Verbesserung von rund 15 %.

Wird der Effekt des flüssigen Mondkerns in der Modellierung berücksichtigt (Kapitel 5.1), vermindert sich der wrms nochmals. Die Differenz zum Modell ohne Kern ist in Abbildung 4.12 dargestellt. Nahezu über die gesamte Datenreihe wurde das Modell besser an die Messungen angepasst. Ab 1985 wurde der wrms im Mittel um 9.8 mm reduziert, das entspricht einer weiteren relativen Verbesserung von rund 20 % im Vergleich zur Lösung ohne Kerneinfluss.

4.4 Programmpaket zur Simulation von LLR-Messungen

Die Anordnung der LLR-Bodenstationen auf der Erde und der Reflektoren auf dem Mond zeigt eine sehr inhomogene Verteilung (Abbildung 2.1). Alle gegenwärtigen LLR-Observatorien befinden sich auf der Nordhalbkugel in Nordamerika und Europa. Die Reflektoren auf dem Mond sind ebenfalls auf der nördlichen Hemisphäre verteilt, wobei der Reflektor L1 mit rund -35.04° selenozentrischer Länge und 38.33° Breite der randnächste Reflektor ist. Um eine optimale Sensitivität des LLR-Netzes bezüglich der Rotationsbewegung des Mondes zu erreichen, sollten künftige Instrumente zur Entfernungsmessung möglichst nah am Rand des Mondes installiert werden. Variationen in der Rotationsbewegung des Mondes können sich dort im Idealfall mit bis zu 100 % in einer Änderung der zu messenden Entfernung niederschlagen. Für die Erhöhung der Sensitivität auf gezeitenbedingte Bewegungen der Mondoberfläche können Instrumente im „Zentralteil“ des Mondes mit selenozentrischer Länge und Breite um 0° in Kombination mit randnahen Instrumenten genutzt werden.

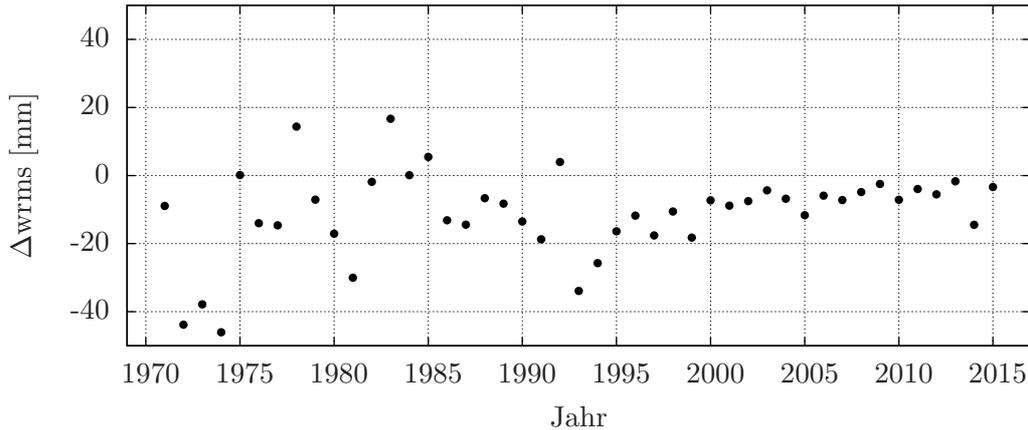


Abb. 4.12: Differenz des jährlichen wrms der 1-Weg-Residuen der Modellierung mit flüssigem Mondkern zur Modellierung ohne Kern.

Dadurch würden die Variationen in lokal senkrechter Richtung, beschrieben durch die Lovezahl h , und lokal tangentialer Richtung, beschrieben durch die Lovezahl l , bestmöglich in die zu messende Entfernungskomponente abgebildet werden.

Zukünftige Instrumente zur Entfernungsmessung auf dem Mond könnten neue passive Retroreflektoren oder aktive Transponder sein [Williams u. a., 2009]. Reflektoren haben den Vorteil einer langen Lebensspanne und sind unabhängig von einer Stromversorgung. Der Einsatz von Reflektorpaneelen aus mehreren Einzelreflektoren, wie bei den gegenwärtigen Reflektoren, führt zu einer librationsabhängigen Unsicherheit im Bereich von mehreren Zentimetern. Durch die Librationsbewegung des Mondes kann die Reflektornormale bis zu 10° von der Richtung zur Erde abweichen und die Entfernung der einzelnen Prismen zur Bodenstation variiert über das Reflektorpaneel. In der Messung kann nicht entschieden werden, von welchem Einzelprisma ein empfangenes Photon reflektiert wurde. In der Kombination mehrerer Messungen zu einem NP führen die Librationen letztendlich zu einer zeitlichen Aufweitung des rückkehrenden Impulses, sodass eine Verkürzung der Pulsdauer keinen Genauigkeitsgewinn liefern würde. Größere Einzelreflektoren, die zur Zeit entwickelt werden, weisen keine librationsabhängigen Mehrdeutigkeiten auf und ermöglichen künftige Steigerungen in der Messgenauigkeit von einer bis zwei Größenordnungen [Currie u. a., 2013]. Mit aktiven Laser Transpondern auf dem Mond könnten viele SLR-Stationen an den LLR-Messungen teilnehmen, da der hohe Signalverlust der bisherigen 2-Wege-Messung (proportional zu $1/X_{EM}^4$) signifikant auf $1/X_{EM}^2$ der 1-Wege-Messung reduziert wird. Die Schwierigkeiten bei aktiven Lasern auf dem Mond liegen zum einen in der Verfügbarkeit von entsprechenden Lasern [Dehant u. a., 2012] und in der nötigen dauerhaften Stromversorgung, die im Idealfall über mehrere Jahre hinweg funktionstüchtig sein sollte.

Um den Effekt von neuen Observatorien und Reflektoren auf die geschätzten Parameter zu untersuchen, wurde in dieser Arbeit eine Simulation durchgeführt. Diese ermöglicht es, LLR-Messungen zu simulieren und auszuwerten. Im Folgenden werden die entsprechenden Schritte zur Erzeugung und Auswertung von Daten kurz zusammengefasst. Eine Analyse von simulierten Daten von neuen Observatorien und Retroreflektoren findet sich in Kapitel 7. Nach Berechnung einer Ephemeride und der benötigten partiellen Ableitungen über den zu simulierenden Zeitraum müssen drei Schritte im Programm der Parameterschätzung durchgeführt werden:

1. Berechnen möglicher Messzeitpunkte an den zu simulierenden Bodenstationen: Im ersten Schritt werden gleichabständige Messzeitpunkte für ganze Nächte erzeugt. Die Steuerung erfolgt über
 - Beginn des simulierten Zeitraums,

- Ende des simulierten Zeitraums,
- Abstand zwischen den Nächten mit Messungen,
- Dauer für die Messung eines NP (bestimmt die Anzahl der simulierten NP pro Nacht),
- maximale Höhe der Sonne am Himmel, unterhalb derer Messungen möglich sind,
- minimale Höhe des Mondes am Himmel, ab der Messungen möglich sind sowie
- Parameter für die Verwendung aller Reflektoren, oder nur Reflektoren im nicht von der Sonne beschienenen Teil des Mondes.

Anhand einer Stations- und Reflektorliste können beliebige Positionen von Bodenstationen und Reflektoren verwendet werden. Derzeit ist die Möglichkeit von Messungen am Tageshimmel nicht implementiert. Nach den erfolgreichen Versuchen auf der französischen Station [Courde, 2016] soll diese Möglichkeit künftig mit berücksichtigt werden.

2. Berechnung der Laufzeiten der Laserpulse und Hinzufügen von Messrauschen: in diesem Schritt wird eine vollständige Beobachtungsdatei mit simulierten Daten erzeugt.
3. Auswertung der simulierten Daten: die simulierten Daten können mit den vorhandenen realen Daten in einer Beobachtungsdatei gemeinsam ausgewertet werden. Gegebenenfalls muss die Parameterschätzung um weitere Stations- und Reflektorkoordinaten erweitert werden.

5 Ergebnisse Newton'sche Parameter

5.1 Effekt der Modellierung des flüssigen Mondkerns

Der flüssige Mondkern (Kapitel 4.3) muss für hohe Genauigkeiten in der Auswertung berücksichtigt werden. Dazu müssen zunächst die Startwerte für die Kopplungskonstante K_v und den Kernrotationsvektor ω_c bestimmt werden. Die Abplattung der CMB wird aus der DE430-Ephemeride mit $f_c = 2.462 \times 10^{-4}$ übernommen und auf diesen Wert fixiert. Die Kopplungskonstante wird der DE430-Ephemeride entnommen, in der das Verhältnis zum polaren Trägheitsmoment des Gesamtmondes C_M geschätzt wird [Folkner u. a., 2014]. Mit dem DE430-Wert in der Einheit 1/d und C_M aus Gleichung (4.74) folgt

$$K_v = \left(\frac{K_v}{C_M} \right)_{DE430} \frac{1}{86400} C_M , \quad (5.1)$$

die in Gleichung (4.62) verwendet werden kann.

Der Startwert des Kernrotationsvektors kann nicht aus der DE-Ephemeride übernommen werden, da diese einen zur IfE-Berechnung abweichenden Startzeitpunkt der Ephemeridenintegration verwendet und der Kernrotationsvektor nicht in der veröffentlichten Ephemeride zur Verfügung steht. Die folgende Abschätzung der Startwerte basiert auf Williams u. a. [2001], aufbauend auf den Arbeiten von Goldreich [1967] und Yoder [1981, 1995]. Darin wird ein Parameter ξ eingeführt, der sich aus der Kopplungskonstante, dem polaren Kernträgheitsmoment und der Geschwindigkeit der Knotenbewegung der Mondbahn berechnet und dessen Wert aus theoretischen Überlegungen der Kerneigenschaften zu rund $\xi = 0.02$ abgeleitet wird. Die Eulerwinkel $\psi_m, \vartheta_m, \varphi_m$ und der Rotationsvektor des Mantels ω_m zur Startzeit der Integration sind aus der Ausgleichung der LLR-Analyse bekannt. In Williams u. a. [2001] werden die Kern-Eulerwinkel ψ_c und ϑ_c mit den entsprechenden Mantelwinkeln verknüpft. Daraus folgt

$$\psi_c - \psi_m = \arctan \left(\frac{1}{\xi} \right) \quad (5.2)$$

und

$$\vartheta_c = \arctan \left(\frac{\xi \tan \vartheta_m}{\sqrt{1 + \xi^2}} \right) . \quad (5.3)$$

Die Rotationsrate des Mantels $\dot{\varphi}_m$ kann mit Gleichung (2.8c) berechnet werden. Für den Kern folgt nach Williams u. a. [2001]

$$\dot{\varphi}_c = \dot{\varphi}_m \cos \vartheta_m \sqrt{1 + (\tan \vartheta_c)^2} . \quad (5.4)$$

Durch Umkehrung von Gleichung (2.8) kann der Rotationsvektor des Mantels im HAS berechnet werden [Schneider, 1992]

$$\omega_{mx} = \dot{\vartheta}_m \cos \varphi_m + \dot{\psi}_m \sin \varphi_m \sin \vartheta_m , \quad (5.5a)$$

$$\omega_{my} = -\dot{\vartheta}_m \sin \varphi_m + \dot{\psi}_m \cos \varphi_m \sin \vartheta_m , \quad (5.5b)$$

$$\omega_{mz} = \dot{\varphi}_m + \dot{\psi}_m \cos \vartheta_m . \quad (5.5c)$$

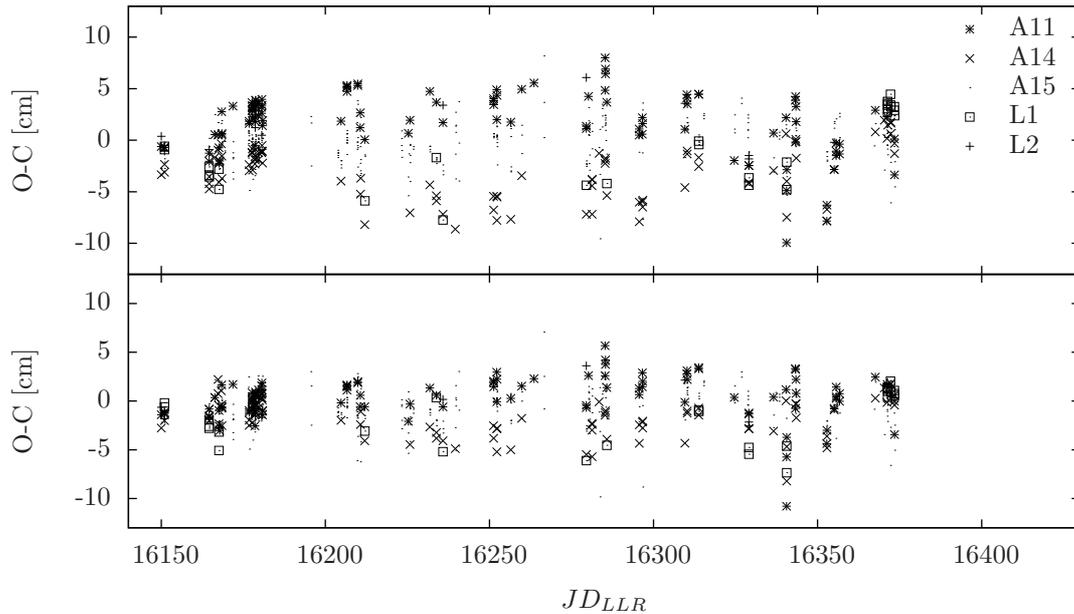


Abb. 5.1: 1-Weg-Residuen (observed-computed $O-C$) der Modellierung ohne Kern (oben) und mit Kern (unten) im Zeitraum zwischen $JD_{LLR} = 16150$ und $JD_{LLR} = 16380$. Die Residuen sind nach den angemessenen Apollo- (A11, A15) und Lunochod- (L1, L2) Reflektoren unterteilt.

Tab. 5.1: Ungewichtete Mittelwerte $\overline{O-C}$, Standardabweichungen σ_{O-C} und rms-Werte rms_{O-C} für die Residuen zu den Apollo-Reflektoren aus Abbildung 5.1

Kernmodellierung	A15		A11		A14	
	ohne	mit	ohne	mit	ohne	mit
$\overline{O-C}$ [cm]	-0.2	-0.7	1.0	-0.2	-2.9	-1.6
σ_{O-C} [cm]	2.0	1.9	3.5	2.8	2.6	2.0
rms_{O-C} [cm]	2.0	2.0	3.6	2.8	3.9	2.5

Nach Williams u. a. [2001] berechnet sich der Startwert des Kernrotationsvektors im Mantelsystem zu

$$\boldsymbol{\omega}_c = \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}_c \sin \vartheta_c \sin (\psi_c - \psi_m) \\ \dot{\varphi}_c [\cos \vartheta_m \sin \vartheta_c \cos (\psi_c - \psi_m) - \sin \vartheta_m \cos \vartheta_c] \\ \dot{\varphi}_c [\sin \vartheta_m \sin \vartheta_c \cos (\psi_c - \psi_m) + \cos \vartheta_m \cos \vartheta_c] - \dot{\varphi}_m \end{pmatrix} + \boldsymbol{\omega}_m. \quad (5.6)$$

Die Größen K_v/C_M und $\boldsymbol{\omega}_c$ werden als neue Parameter in der Ausgleichung mitgeschätzt. Das Verhältnis K_v/C_M wird anstelle K_v geschätzt, um eine direkte Vergleichbarkeit mit anderen Lösungen, zum Beispiel vom JPL, zu gewährleisten. Die Ableitungen werden durch numerische Differentiation erzeugt (Kapitel 2.2.2). Abbildung 5.1 zeigt beispielhaft für einen Teil der Datenreihe den Vergleich zwischen den 1-Weg-Residuen des Modells ohne Kern und mit Kern. In Tabelle 5.1 sind die ungewichteten Mittelwerte, Standardabweichungen und rms-Werte der 1-Weg-Residuen zu den Reflektoren A11, A14 und A15 aus diesem Zeitraum zusammengefasst. Die Standardabweichung beschreibt die Streuung um den Mittelwert der Messwerte, während der rms ein Maß für die Gesamtabweichung vom Modellwert darstellt. Die Residuen zum A15-Reflektor ändern sich im betrachteten Zeitraum nur wenig. Der ungewichtete Mittelwert verschiebt sich um 5 mm, der rms bleibt konstant bei 2 cm. Die Residuen zu den Reflektoren A11 und A14 zeigen bei der Modellierung ohne Kern eine deutliche Verschiebung gegeneinander (Abbildung 5.1, oben). Die Mittelwerte der A11- und A14-Residuen weichen um 3.9 cm voneinander ab, die Standardabweichungen liegen 0.6 cm (A14) bis 1.5 cm (A11) über den Werten für den A15-Reflektor, wobei die Abweichung zum Modell mit

Tab. 5.2: Lovezahl h_2 , Dissipationsparameter der Mondgezeiten τ_M und Kerndissipationsparameter K_v/C_M des Mondes und deren 3σ -Genauigkeiten im Vergleich zur DE430-Lösung. „Rotation alt“ bezeichnet die Modellierung der Mondrotation der alten Programmversion, „neu“ nach Kapitel 4.3.

	Rotation alt	neu ohne Kern	neu mit Kern	DE430
τ_M [d]	0.2019±0.0016	0.1596±0.0003	0.0981±0.0034	0.0958±0.0109
h_2	0.0593±0.0035	0.0699±0.0027	0.0546±0.0022	0.0476±0.0064
K_v/C_M [1/d]	-	-	$(1.145\pm 0.066)\times 10^{-8}$	$(1.6366\pm 0.135)\times 10^{-8}$

rms-Werten über 3.5 cm relativ hoch ist. Die große Abweichung zwischen den beiden Reflektoren im Vergleich zu A15 deutet auf eine ungenügende Modellierung der Librationen hin, insbesondere der Libration in Länge. Die Implementierung des 2-Schichten-Modells mit flüssigem Kern führt zu einer deutlichen Verringerung der „Aufspreizung“ zwischen den A11- und A14-Residuen. Die Differenz der Mittelwerte beträgt mit Kernmodellierung 1.4 cm, die rms-Werte konnten auf 2.5 cm (A14) bis 2.8 cm (A11) reduziert werden und haben nur noch eine Abweichung von 0.5 cm bis 0.8 cm zum A15-Wert. Die dargestellte Reduktion der „Aufspreizung“ zwischen den A11- und A14-Residuen zeigt sich in der gesamten Datenreihe ab 1985 und ist der Hauptgrund für die Verringerung des w_{rms} in Abbildung 4.12 im Vergleich zum Modell „Mond ohne Kern“. Vor 1985 ist der Effekt durch die geringere Messgenauigkeit nicht so deutlich. Die Residuen der gesamten Datenreihe werden in Kapitel 5.8 untersucht.

Die Bestimmung der Kernparameter K_v/C_M und ω_c führt zu deutlichen Änderungen im Dissipationsparameter τ_M und in der lunaren Lovezahl h_2 . Tabelle 5.2 fasst die Ergebnisse für beide Größen im Vergleich zur alten Version und den Werten der DE430-Ephemeride zusammen. In der Modellierung eines homogenen Mondes ohne Kern wird der gesamte Dissipationseffekt durch die Zeitverzögerung der Mondgezeiten τ_M beschrieben. Das führt zu größeren Werten für τ_M als im neuen Modell, in dem der Effekt auf Mantel (τ_M) und CMB (K_v/C_M) aufgeteilt ist. Dementsprechend sind im 2-Schichten-Modell beide Parameter mit -0.997 hoch korreliert. Die Korrelationen zum Kernrotationsvektor ω_c sind für beide Parameter nahezu gleich groß, aber mit jeweils unterschiedlichem Vorzeichen behaftet. Mit ω_{cz} sind τ_M und K_v/C_M mit -0.043 und 0.054 sehr gering korreliert, für ω_{cx} und ω_{cy} sind die Korrelationen mit 0.54/-0.54 und 0.57/-0.57 größer. Die berechnete Genauigkeit von τ_M wird um eine Größenordnung verringert, wenn K_v/C_M mitgeschätzt wird. Das ist ein Effekt der hohen Korrelation zwischen den Parametern. Im Vergleich dazu bleibt die Genauigkeit von h_2 nahezu konstant, wenn die Kernparameter mitgeschätzt werden. Die Korrelationen mit h_2 sind mit 0.001 für K_v/C_M und maximal 0.1 für ω_c sehr gering.

Der Wert für τ_M liegt innerhalb der Genauigkeitsangabe des DE430-Wertes, während der Kernkopplungsparameter rund 30 % kleiner ist als der DE430-Wert. Die Lovezahl h_2 unterscheidet sich in der Modellierung mit flüssigem Kern um 15 % vom DE430-Wert. Eine mögliche Ursache für die Differenzen liegt in der Schätzung von zusätzlichen Parametern in der DE430-Lösung, in der die Abplattung der CMB f_c und zusätzliche, nicht in der Berechnung der Ephemeriden enthaltene, Librationsparameter geschätzt werden [Williams u. a., 2013]. Diese Parameter wurden in dieser Arbeit nicht implementiert und sind Gegenstand künftiger Untersuchungen. Durch Korrelationen von f_c und den zusätzlichen Librationsparametern mit τ_M , h_2 und K_v/C_M ist ebenfalls eine Annäherung der erzielten Genauigkeiten der IFE-Lösung an die DE430-Ergebnisse zu erwarten.

Die verringerten Werte der Post-fit-Residuen des 2-Schichten-Modells (Abbildung 4.12 und 5.1) sind ein deutlicher Hinweis auf die Existenz eines flüssigen Kerns beziehungsweise einer flüssigen Schale um einen inneren, festen Kern. Die Modellierung des Mondes als fester Körper, dessen Dissipation vollständig durch den Parameter τ_M beschrieben wird, führt nach der Ausgleichung zu deutlich schlechteren Residuen. Die Kopplung zwischen Kern und Mantel ist schwach und die Ro-

tationsachse des flüssigen Kerns liegt nahezu senkrecht zur Ekliptikebene [Goldreich, 1967]. Die Inklination des Kernrotationsvektors zur Ekliptiknormalen beträgt mit dieser Modellierung im Mittel etwa 6 Bogenminuten, im Vergleich dazu ist der Mantelrotationsvektor im Mittel 92.6 Bogenminuten gegen die Ekliptiknormale geneigt. Je stärker die Kopplung zwischen Mantel und flüssigem Kern, desto geringer wird der Inklinationsunterschied.

Der genaue innere Aufbau des Mondes ist trotz langjähriger Forschung unbekannt. Wieczorek u. a. [2006] geben einen Überblick über den Kenntnisstand nach 40 Jahren Erforschung des Mondes. In Williams u. a. [2014] werden Ergebnisse der GRAIL-Mission und aus LLR-Daten kombiniert. Darin basiert der innere Aufbau auf zwei Modellen von Garcia u. a. [2011] und Weber u. a. [2011]. Der Radius des flüssigen Kerns variiert in den verschiedenen Modellrechnungen zwischen 220 km und 380 km. Der Radius eines möglichen inneren, festen Kerns variiert, je nach Modellierung, zwischen 0 km und maximal 280 km. Die Erweiterung des Rotationsmodells um einen festen inneren Kern kann auf den Gleichungen von Dumberry und Wieczorek [2016] aufbauen und sollte im Hinblick auf künftige sehr genaue Messungen zu Einzelprisma-Reflektoren (Kapitel 4.4) in weiterführenden Arbeiten untersucht werden.

5.2 Stationsabhängige Laufzeitkorrekturen

Stationsabhängige Laufzeitkorrekturen $\Delta\tau_{\text{sys}}$ werden in die Analyse eingeführt, um mögliche Fehler in der Kalibrierung der Messungen oder andere Effekte, die die Laufzeit der Laserpulse systematisch beeinflussen, zu kompensieren. Einige Laufzeitkorrekturen wurden nach bekannten Hardwareänderungen implementiert, zum Beispiel nach Änderungen am Laser oder der Kalibrierungsmethode. Andere Laufzeitkorrekturen werden aus der Analyse der Post-fit-Residuen bestimmt, wenn eine Gruppe von Residuen eine auffällige Verschiebung zum Modell zeigt.

In Tabelle 5.3 sind die mitgeschätzten 1-Weg Laufzeitkorrekturen mit ihrer 1σ -Genauigkeit zusammengestellt. Für die ältere Station McDonald wird neben Laufzeitkorrekturen für kürzere Zeitspannen auch eine Laufzeitkorrektur für die gesamte Datenreihe geschätzt. Eine Laufzeitkorrektur über die gesamte Messreihe einer Station ist sehr hoch mit den Stationskoordinaten korreliert. Das führt zu einem Genauigkeitsverlust in der Koordinatenbestimmung. Da die drei McDonald-Stationen in der Auswertung zu einer einzigen Station zusammengefasst werden, ist es in diesem Fall möglich, die komplette Messreihe der Station McDonald mit einer Laufzeitkorrektur zu versehen. Die Genauigkeit der geschätzten Laufzeitkorrekturen hängt von der Genauigkeit und Anzahl der im entsprechenden Zeitraum vorliegenden NP ab. Die Laufzeitkorrektur der Station WLRs wird nur durch 4 NP bestimmt und weist aus diesem Grund eine deutlich geringere Genauigkeit auf, als zum Beispiel die Laufzeitkorrekturen der Station OCA.

Die überdeckten Zeiträume und die Anzahl der verwendeten Laufzeitkorrekturen unterscheiden sich zwischen den einzelnen LLR-Analysegruppen. Während die Hardwareänderungen an den Stationen feste Anfangs- oder Endzeitpunkte für mögliche Laufzeitkorrekturen festlegen, sind residuenbasierte Laufzeitkorrekturen an das zugrundeliegende Modell gebunden. Jede Analysegruppe definiert daher eigene Vorgaben für die Verwendung von Laufzeitkorrekturen. In Manche [2011] sind die Laufzeitkorrekturen der französischen Gruppe sowie des JPL zusammengefasst und in Pavlov u. a. [2016] die Laufzeitkorrekturen der russischen Analysegruppe.

5.3 Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten

Die Koordinaten der LLR-Stationen und deren Geschwindigkeiten werden bezüglich des ITRS zur Epoche J2000.0 in der Analyse bestimmt. Die Observatorien McDonald, MLRS1 und MLRS2 werden in der Auswertung durch Ergebnisse aus lokalen Vermessungen (local ties) verbunden und als

Tab. 5.3: Geschätzte 1-Weg Laufzeitkorrekturen für die LLR-Stationen mit 1σ -Genauigkeiten.

Station	Zeitraum [JD _{LLR}]	Laufzeitkorrektur [cm]	
McDonald	690.0 – 6250.0	1818.81 ± 0.61	gesamte Datenreihe
	690.0 – 1110.5	20.26 ± 6.47	aus Residuen
	1428.5 – 1434.5	-31.03 ± 9.83	aus Residuen
	2277.5 – 2336.5	47.17 ± 2.59	aus Residuen
	2690.9 – 2838.6	-27.16 ± 2.14	aus Residuen
MLRS1	5548.5 – 6000.5	10.55 ± 2.95	aus Residuen
	6120.5 – 6350.5	-7.46 ± 1.45	aus Residuen
LURE	6522.5 – 7007.5	-6.66 ± 0.78	Hardwareänderung
	7108.5 – 7210.5	-8.67 ± 1.08	Hardwareänderung
	7761.5 – 7762.5	9.84 ± 1.59	aus Residuen
	7892.5 – 8622.5	-7.64 ± 1.09	aus Residuen
WLRS	9400.5 – 10150.5	-26.97 ± 9.11	gesamte Datenreihe
OCA	5750.5 – 7000.5	4.13 ± 0.92	Hardwareänderung
	8500.5 – 8920.5	2.67 ± 0.23	aus Residuen
	9160.5 – 9850.5	-4.11 ± 0.21	aus Residuen
	9850.5 – 10427.5	-5.42 ± 0.18	aus Residuen
	10427.5 – 10988.5	-9.84 ± 0.19	aus Residuen
APOLLO	14440.5 – 14650.5	2.86 ± 0.06	aus Residuen
	15501.0 – 16024.8	3.97 ± 0.10	Hardwareänderungen
	16145.5 – 16518.5	-4.38 ± 0.07	aus Residuen

eine einzige Station in der Ausgleichung eingeführt. Die Werte für die verwendeten local ties finden sich in Tabelle A.2. Die Koordinaten und Geschwindigkeiten der Station WLRS werden auf den a-priori Werten im Internationalen Terrestrischen Referenzrahmen (ITRF) festgehalten. Im Vergleich zu den anderen Stationen liegen für eine genaue Bestimmung der Stationskoordinaten zu wenige NP vor. Bedingt durch die relativ kurze Messzeitspanne der Stationen LURE und MLRO, werden in der Standardlösung nur deren Positionen mitgeschätzt. Die Stationsgeschwindigkeiten werden auf den a-priori ITRF2008-Werten fixiert. In den Tabellen A.1 und A.3 sind die a-priori Stationspositionen und -geschwindigkeiten für alle LLR-Observatorien zusammengestellt.

Die Stationspositionen und -geschwindigkeiten aus der LLR-Analyse sind mit ihren 1σ -Genauigkeiten und der Differenz zu den ITRF-Werten in Tabelle 5.4 und 5.5 angegeben. Für das McDonald-Observatorium sind die MLRS2-Werte aufgeführt, die Differenzen und Genauigkeiten gelten ebenfalls für die Stationen MLRS1 und McDonald. Die ermittelten Genauigkeiten der Koordinaten liegt zwischen 0.9 mm für die y-Komponente der OCA-Station und 2.3 cm für die z-Komponente von MLRO. Die Koordinaten der Stationen MLRS, OCA und APOLLO können mit der höchsten Genauigkeit bestimmt werden. Dazu tragen zum Einen die lange Datenreihe von MLRS und OCA und zum Anderen die genauen Messungen von APOLLO und OCA bei. Die Abweichungen zum ITRF2008 liegen im Bereich von wenigen Zentimetern. Die geschätzten Stationsgeschwindigkeiten von MLRS, OCA und APOLLO werden mit einer internen Standardabweichung zwischen 0.1 mm/a und 0.9 mm/a bestimmt. Die Abweichung zu den Geschwindigkeiten aus dem ITRF2008 betragen für MLRS bis zu 4.2 mm/a, während die Abweichung für OCA maximal 0.5 mm/a beträgt.

Biskupek [2015] führte einen Vergleich zwischen den Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten der LLR-Lösung mit der SLR-Lösung des DTRF2008 durch. Das DTRF2008 wurde von Seitz u. a. [2012] am Deutschen Geodätischen Forschungsinstitut an der Technischen Universität München

Tab. 5.4: Aus LLR bestimmte Stationskoordinaten $\mathbf{x}_{Sta} = [x \ y \ z]^T$ und 1σ -Genauigkeiten mit Differenzen zu den ITRF-Koordinaten $\Delta_{ITRF} = \mathbf{x}_{Sta} - \mathbf{x}_{ITRF}$. Die Station WLRs wird auf den ITRF-Koordinaten fixiert (Tabelle A.1).

		x [m]	y [m]	z [m]
McDonald	LLR	-1330781.374 ± 0.0029	-5328755.616 ± 0.0022	3235697.642 ± 0.0063
MLRS1	LLR	-1330121.060 ± 0.0029	-5328532.308 ± 0.0022	3236146.685 ± 0.0063
MLRS2	LLR	-1330021.442 ± 0.0029	-5328403.359 ± 0.0022	3236481.668 ± 0.0063
LURE	LLR	-5466007.166 ± 0.0052	-2404427.466 ± 0.0060	2242188.841 ± 0.0118
OCA	LLR	4581692.147 ± 0.0015	556196.115 ± 0.0009	4389355.105 ± 0.0046
APOLLO	LLR	-1463998.894 ± 0.0019	-5166632.781 ± 0.0018	3435012.920 ± 0.0094
MLRO	LLR	4641978.797 ± 0.0135	1393067.604 ± 0.0154	4133249.427 ± 0.0227
MLRS2	Δ_{ITRF}	0.037	-0.030	-0.003
LURE	Δ_{ITRF}	-0.045	-0.021	-0.020
OCA	Δ_{ITRF}	0.007	0.031	-0.007
APOLLO	Δ_{ITRF}	-0.002	-0.016	-0.068
MLRO	Δ_{ITRF}	-0.007	0.071	-0.049

Tab. 5.5: Aus LLR bestimmte Stationsgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{x}}_{Sta} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$ und 1σ -Genauigkeiten mit Differenzen zu den ITRF-Geschwindigkeiten $\Delta_{ITRF} = \dot{\mathbf{x}}_{Sta} - \dot{\mathbf{x}}_{ITRF}$. Die Werte für die Stationen WLRs, LURE und MLRO werden auf den ITRF2008-Geschwindigkeiten fixiert (Tabelle A.3).

		\dot{x} [m/a]	\dot{y} [m/a]	\dot{z} [m/a]
MLRS2	LLR	-0.0086 ± 0.0003	0.0004 ± 0.0003	-0.0013 ± 0.0006
OCA	LLR	-0.0141 ± 0.0001	0.0193 ± 0.0001	0.0114 ± 0.0005
APOLLO	LLR	-0.0112 ± 0.0002	0.0000 ± 0.0001	-0.0053 ± 0.0009
MLRS2	Δ_{ITRF}	0.0042	0.0000	0.0038
OCA	Δ_{ITRF}	0.0001	0.0005	-0.0002
APOLLO	Δ_{ITRF}	0.0029	-0.0015	0.0011

berechnet. Für einen analogen Vergleich mit den Ergebnissen dieser Arbeit, wurden die Geschwindigkeiten der Stationen LURE (Sender) und MLRO zusätzlich aus den LLR-Daten mitgeschätzt. Wie in [Biskupek \[2015\]](#) beschrieben, wurden die Geschwindigkeitskomponenten der beiden Stationen unter dem Einfluss von leichten Zwängen (Constraints) geschätzt. Die Constraints erlaubten Änderungen in der Stationsbewegung von 1 mm pro Jahr für LURE und MLRO. Ohne Constraints an die Geschwindigkeiten würden bei LURE unrealistisch große Zuschläge an den Stationskoordinaten von bis zu 50 cm auftreten. Die Stationsgeschwindigkeit in z-Richtung ändert sich um über 4 cm/a und ändert auch das Vorzeichen. Durch die wenigen NP für die Station MLRO kann die Stationsgeschwindigkeit nicht gut bestimmt werden. Ohne Constraints ergeben sich ebenfalls erhöhte Zuschläge an die Stationskoordinaten, die jedoch mit maximal 5 cm eine Größenordnung kleiner als bei LURE sind. Die Stationsgeschwindigkeiten ändern sich ohne Constraints nur um maximal 4 mm/a. Mit weiteren NP kann die Stationsgeschwindigkeit von MLRO in Zukunft ohne beziehungsweise mit weniger starken, Constraints geschätzt werden. Der zweistufige Ansatz in der Schätzung der Geschwindigkeiten von [Biskupek \[2015\]](#) wurde nicht übernommen. In dieser Arbeit wurden die Störrotationen (Kapitel 5.4), die Masse des Erde-Mond-Systems und die Laufzeitkorrekturen im Gegensatz zu [Biskupek \[2015\]](#) mitgeschätzt.

Die geschätzten Geschwindigkeiten und Koordinaten der Stationen LURE und MLRO sind in Tabelle 5.6 mit ihren Abweichungen zur ITRF2008-Lösung zusammengefasst. Die Werte für die anderen Stationen ändern sich nur im sub-mm-Bereich und sind nicht aufgeführt. Die Genauigkeit der Stationskoordinaten verringert sich im Vergleich zur Lösung mit fixierter Stationsgeschwin-

Tab. 5.6: Gemeinsam aus LLR bestimmte Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten mit 1σ -Genauigkeiten und Differenzen zu den ITRF-Werten für LURE und MLRO.

	LURE	MLRO	$\Delta_{ITRF,LURE}$	$\Delta_{ITRF,MLRO}$
x [m]	-5466007.162 ± 0.014	4641978.795 ± 0.019	-0.041	-0.009
y [m]	-2404427.480 ± 0.015	1393067.603 ± 0.022	-0.035	0.070
z [m]	2242188.817 ± 0.018	4133249.428 ± 0.027	-0.044	-0.048
\dot{x} [m/a]	-0.0123 ± 0.0011	-0.0179 ± 0.0011	0.0004	0.0002
\dot{y} [m/a]	0.0608 ± 0.0011	0.0193 ± 0.0012	-0.0012	0.0000
\dot{z} [m/a]	0.0300 ± 0.0012	0.0147 ± 0.0012	-0.0020	0.0000

Tab. 5.7: Differenzen der DTRF2008-SLR-Lösung zur LLR-Lösung ($\Delta = \text{LLR} - \text{SLR}$). Für einen Vergleich mit [Biskupek \[2015\]](#) müssen die Ergebnisse mit -1 multipliziert werden.

	Δx [m]	Δy [m]	Δz [m]	$\Delta \dot{x}$ [m/a]	$\Delta \dot{y}$ [m/a]	$\Delta \dot{z}$ [m/a]
MLRS2	0.036	-0.021	-0.005	-0.0041	0.0017	0.0034
LURE	-0.017	-0.148	-0.042	0.0013	-0.0086	-0.0022
OCA	0.009	0.030	-0.005	-0.0019	0.0001	0.0005
MLRO	-0.005	0.070	-0.046	0.0002	0.0001	-0.0002

digkeit um den Faktor 1.5 bis 2.7 für LURE und die Abweichung zur ITRF-Lösung erhöht sich um bis zu 24 mm. Für MLRO beträgt der Faktor der Genauigkeitsänderung rund 1.3, wobei sich die Koordinaten nur im mm-Bereich ändern. Die geschätzten Geschwindigkeiten von MLRO sind annähernd gleich zur ITRF-Lösung, während bei LURE Abweichungen bis zu 2 mm/a auftreten.

Tabelle 5.7 zeigt die Koordinaten- und Geschwindigkeitsdifferenzen der LLR-Lösung zur SLR-Lösung des DTRF2008. Ein Vergleich mit [Biskupek \[2015\]](#) zeigt, dass in dieser Arbeit die Differenzen zur DTRF-Lösung deutlich reduziert werden konnten. Die 3D-Koordinatendifferenzen verringerten sich für jede Station etwa um den Faktor 2, bei LURE um den Faktor 2.5. Die Differenzen der geschätzten Stationsgeschwindigkeiten verringerten sich ebenfalls um den Faktor 2.2 für LURE und 4.5 für die Station OCA.

Um die Netzwerkgeometrie der LLR-Lösung in Tabelle 5.7 mit der DTRF2008 und der ITRF2008-Lösung zu vergleichen, wurde jeweils eine Ähnlichkeitstransformation (3D-Helmerttransformation) auf die SLR-Lösung und ITRF-Lösung durchgeführt. Für die Koordinaten und Geschwindigkeiten werden jeweils sieben Transformationsparameter, ein Maßstab μ , drei Translationsparameter $\mathbf{d} = [d_x \ d_y \ d_z]^T$ und drei Rotationsparameter $\mathbf{R} = [r_x \ r_y \ r_z]^T$ in Form von kleinen Winkeln in einer Ausgleichung bestimmt. Nach [Altamimi u. a. \[2002\]](#) und [Angermann u. a. \[2004\]](#) berechnet sich die Transformation zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{SLR} \\ \dot{\mathbf{x}}_{SLR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \mu)\mathbf{R} & 0 \\ (1 + \mu)\dot{\mathbf{R}} + \mu\mathbf{R} & (1 + \mu)\mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{LLR} \\ \dot{\mathbf{x}}_{LLR} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \dot{\mathbf{d}} \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Tabelle 5.8 enthält die Parameter der Transformation zwischen der LLR-Lösung und der SLR-Lösung des DTRF2008 mit vier beteiligten Stationen (MLRS, LURE, OCA, MLRO) sowie der ITRF2008-Lösung mit der zusätzlichen Station APOLLO. Die verwendeten a-priori APOLLO-Koordinaten und Geschwindigkeiten (Tabellen A.1 und A.3) sind in dieser Auswertung keine offiziellen ITRF-Werte und werden für die Transformation nur als solche angenommen. Im Vergleich zu [Biskupek \[2015\]](#) sind die Transformationsparameter bezüglich des DTRF2008 kleiner, besonders in y-Richtung des Ursprungs d_y . Die Transformation auf das ITRF2008 weist nochmals geringere Werte der Transformationsparameter auf. Der angegebene mittlere Fehler der transformierten Stationskoordinaten zeigt, dass die aus LLR bestimmte Stationsgeometrie auf 1.2 cm bezüglich der Koordinaten und 1.1 cm/a für die Geschwindigkeiten mit dem ITRF übereinstimmt.

Tab. 5.8: Parameter der Helmerttransformation zwischen der LLR und DTRF2008-SLR-Lösung sowie LLR und ITRF2008-Lösung für Koordinaten \mathbf{x} und Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{x}}$.

Parameter	\mathbf{x}_{DTRF} [m]	\mathbf{x}_{ITRF} [m]	Parameter	$\dot{\mathbf{x}}_{DTRF}$ [m/a]	$\dot{\mathbf{x}}_{ITRF}$ [m/a]
d_x	-0.005 ± 0.018	-0.016 ± 0.013	\dot{d}_x	0.002 ± 0.018	0.003 ± 0.013
d_y	-0.047 ± 0.023	0.014 ± 0.016	\dot{d}_y	-0.006 ± 0.023	-0.003 ± 0.016
d_z	-0.057 ± 0.017	-0.055 ± 0.013	\dot{d}_z	-0.001 ± 0.017	-0.001 ± 0.013
r_x	0.054 ± 0.038	0.002 ± 0.024	\dot{r}_x	0.007 ± 0.038	0.005 ± 0.024
r_y	0.021 ± 0.023	0.004 ± 0.017	\dot{r}_y	0.004 ± 0.023	0.003 ± 0.017
r_z	-0.084 ± 0.015	-0.046 ± 0.011	\dot{r}_z	-0.003 ± 0.015	-0.001 ± 0.011
μ	0.034 ± 0.014	0.037 ± 0.010	$\dot{\mu}$	-0.001 ± 0.014	-0.001 ± 0.010
mittlerer Fehler	0.017	0.012		0.017	0.011

Die Residuen der Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten nach der Transformation enthält Tabelle 5.9. Im Vergleich zu Biskupek [2015] verringerten sich die mit $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ berechneten 3D-Koordinatendifferenzen zum DTRF2008 im Mittel über alle Stationen um den Faktor 3.9 auf 3.3 cm. Bei den 3D-Differenzen der Stationsgeschwindigkeiten wurde im Mittel eine Reduktion um den Faktor 1.7 auf 0.63 cm/a erreicht. Die Transformation des mit LLR bestimmten Netzes auf das ITRF2008 zeigt eine noch bessere Übereinstimmung. Die mittlere 3D-Koordinatendifferenz vermindert sich auf 2.8 cm und die 3D-Differenz der Geschwindigkeiten auf 0.4 cm/a.

Die neue LLR-Lösung in dieser Arbeit führt zu einer deutlich verbesserten Schätzung der Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten im Vergleich zu Biskupek [2015]. Der zweistufige Auswerteanatz von Biskupek [2015] wird in dieser Arbeit nicht mehr genutzt, die Parameter der Erdorientierung, GM_{E+M} und Laufzeitkorrekturen für LURE und MLRO werden zusammen mit den Koordinaten und Geschwindigkeiten geschätzt.

Tab. 5.9: Differenzen der DTRF2008-SLR-Lösung (1. Block) und ITRF2008-Lösung (2. Block) zur LLR-Lösung ($\Delta = \text{LLR} - \text{SLR}$) nach der Helmerttransformation. Für einen Vergleich mit Biskupek [2015] müssen die Ergebnisse mit -1 multipliziert werden.

	Δx [m]	Δy [m]	Δz [m]	$\Delta \dot{x}$ [m/a]	$\Delta \dot{y}$ [m/a]	$\Delta \dot{z}$ [m/a]
MLRS2	0.011	-0.044	0.006	-0.0037	-0.0077	-0.0043
LURE	0.007	0.035	-0.001	-0.0003	0.0026	0.0013
OCA	-0.011	0.023	-0.019	0.0017	-0.0061	-0.0014
MLRO	-0.007	-0.014	0.014	-0.0003	-0.0061	-0.0007
MLRS2	-0.025	0.005	-0.032	-0.0028	-0.0028	-0.0046
LURE	0.009	-0.003	-0.001	0.0014	-0.0015	0.0012
OCA	-0.003	0.021	-0.020	0.0009	-0.0033	-0.0006
MLRO	0.007	-0.014	0.019	0.0008	-0.0028	-0.0008
APOLLO	0.013	-0.009	0.034	-0.0015	-0.0043	-0.0019

5.4 Parameter der Erdorientierung

In der Transformation zwischen dem ITRS und dem inertialen Ekliptiksystem der Ephemeridenrechnung in Gleichung (2.12) beschreibt die Rotationsmatrix $\mathbf{S}(dt)$ mögliche systematische Abweichungen zwischen dem dynamischen Ephemeridensystem und dem GCRS [Sovers und Fanselow,

Tab. 5.10: Geschätzte Störrotationen Θ_x , Θ_y , $\dot{\Theta}_x$ und Korrektur zur Präzessionskonstante Δp sowie Absolutwert p . In den Varianten Nut1 und Nut2 wurden Nutationskoeffizienten mitgeschätzt (Tabelle 5.11), in der Variante „ohne Nutation“ wurde die Nutation auf die Koeffizienten des MHB2000-Modells fixiert (1 mas = 1 Millibogensekunde).

	ohne Nutation	Nut1	Nut2
Θ_x [mas]	0.57 ± 0.09	0.67 ± 0.10	0.70 ± 0.14
Θ_y [mas]	-0.70 ± 0.04	-0.76 ± 0.05	-0.50 ± 0.11
$\dot{\Theta}_x$ [mas/a]	-0.033 ± 0.008	-0.030 ± 0.009	-0.027 ± 0.009
Δp [mas/a]	-0.126 ± 0.012	-0.110 ± 0.014	-0.114 ± 0.014
p ["/a]	50.384689 ± 0.000012	50.384705 ± 0.000014	50.384701 ± 0.000014

1987; Bauer, 1989]. Die Rotationsmatrix setzt sich aus den Störrotationen

$$\mathbf{S}(dt) = \begin{pmatrix} 1 & \Theta_z & -\Theta_y \\ -\Theta_z & 1 & \Theta_x \\ \Theta_y & -\Theta_x & 1 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

zusammen, mit $\Theta = \Theta_0 + \dot{\Theta}dt$. In der LLR-Auswertung dieser Arbeit werden die Parameter Θ_x , $\dot{\Theta}_x$, Θ_y und $\dot{\Theta}_y$ mitgeschätzt. Mit Θ_x wird der Ekliptikwinkel angepasst und mit Θ_y die Lage des GCRS-Äquators. Eine zusätzliche Schätzung der z-Komponenten ist nicht möglich, da diese vollständig mit den Stationskoordinaten korreliert sind und die Schätzung der Koordinaten sehr stark verfälschen würden. Aus der Komponente $\dot{\Theta}_y$ kann die zeitliche Änderung der Präzessionskonstanten Δp über

$$\Delta p = \frac{\dot{\Theta}_y}{\sin \epsilon_0 \cos \epsilon_0} \quad (5.9)$$

mit dem Ekliptikwinkel ϵ_0 berechnet werden [Bauer, 1989]. Tabelle 5.10 zeigt die geschätzten Werte der Störrotationen Θ_x , Θ_y und $\dot{\Theta}_x$ sowie Δp und den Absolutwert p . Die Korrektur der Präzessionskonstanten $\Delta p = -0.2997''$ pro julianischem Jahrhundert (cy) des MHB2000-Modells bezieht sich auf den Wert des IAU1976-Präzessionsmodells mit $p = 5038.7784''/\text{cy}$ [Lieske u. a., 1977; Mathews u. a., 2002]. Die Addition beider Werte führt zu einer Präzessionskonstanten von $p = 5038.4787''/\text{cy}$. Die in dieser Arbeit geschätzten Korrekturwerte Δp beziehen sich hingegen auf den Wert von $p = 5038.481484''/\text{cy}$ aus Petit und Luzum [2010], sodass nur der Absolutwert der Präzessionskonstanten und nicht die Korrekturwerte zwischen dem MHB2000-Modell und dieser LLR-Lösung verglichen werden kann. In der Variante „ohne Nutation“ wurden die Nutationskoeffizienten des MHB2000-Modells in der Analyse verwendet. In den Varianten Nut1 und Nut2 wurden zwei verschiedene Sätze Nutationskoeffizienten mitgeschätzt, die im folgenden Abschnitt beschrieben werden. Der Absolutwert der Präzessionskonstante ist zwischen 0.082 Millibogensekunden (mas) pro Jahr in Variante Nut1 und 0.098 mas/a in der Variante „ohne Nutation“ kleiner als im MHB2000-Modell. Williams u. a. [2013] berechnen im Rahmen der DE430-Ephemeride die Präzessionskonstante mit Hilfe von LLR-Messungen zu $p = 5038.474''/\text{cy}$ mit gleichzeitiger Schätzung von einigen, nicht näher aufgeführten, Nutationskoeffizienten. Im Rahmen der angegebenen Genauigkeiten stimmen die Ergebnisse für p der Varianten „Nut1“ und „Nut2“ mit dem Wert aus Williams u. a. [2013] überein. Die Vorzeichen der geschätzten Störrotationen Θ_x , Θ_y und $\dot{\Theta}_x$ sind identisch mit den Werten in Williams u. a. [2013], die Absolutwerte sind um den Faktor 8 bis 30 kleiner. Eine Ursache für den Unterschied kann in der unterschiedlichen Modellierung der Ephemeriden von Erde und Mond liegen. Diese Arbeit stützt sich ausschließlich auf LLR-Beobachtungen, während in der DE430-Ephemeride auch Very Long Baseline Interferometrie (VLBI)-Messungen zu Mars und Venus genutzt werden [Folkner u. a., 2014].

Neben den Störrotationen können mit LLR eine Reihe von Nutationskoeffizienten bestimmt werden. [Biskupek \[2015\]](#) erweiterte das Auswerteprogramm, um neben der Schätzung der Koeffizienten der 18.6-Jahres-Periode auch die betragsmäßig größten Koeffizienten mit Perioden von 9.3 Jahren, 365.3 Tagen, 182.6 Tagen und 13.6 Tagen zu bestimmen und verschiedene Berechnungsvarianten zu untersuchen. Diese Arbeit verwendet für die Transformation zwischen dem raum- und erdfesten Bezugssystem die Beschreibung der Präzession nach [Fukushima \[2003\]](#) und [Williams \[1994\]](#) über den sogenannten Celestial Intermediate Origin (CIO), in [Biskupek \[2015\]](#) als FWCIO bezeichnet. Die Nutation wird über das MHB2000-Modell von [Mathews u. a. \[2002\]](#) modelliert, wobei die zeitunabhängigen *in-phase*-Terme A und A'' sowie *out-of-phase*-Terme B und B'' der größten Nutationskoeffizienten geschätzt werden. Die Koeffizienten A beschreiben die Nutation in Länge und B in Schiefe [[Biskupek, 2015](#)].

Tabelle 5.11 zeigt die Differenz von zwei verschiedenen Schätzungen Nut1 und Nut2 der Nutationskoeffizienten zum MHB2000-Modell. In der Variante Nut1 bleiben die Koeffizienten der Periode 13.6 Tage auf dem MHB2000-Wert fixiert, während sie in der Variante Nut2 mitgeschätzt werden. Ein Vergleich mit den Lösungen aus [Biskupek \[2015\]](#) ist nicht direkt möglich. Die Lösung Nut1 kann mit der Lösung N6 von [Biskupek](#) (alle Perioden außer 13.6 Tage) verglichen werden, da die gleichen Störrotationen in beiden Lösungen mitgeschätzt wurden. Allerdings erfolgte die Transformation zwischen dem erdfesten und raumfesten System bei [Biskupek \[2015\]](#) über den Frühlingspunkt und nicht über den CIO. Die Koeffizienten der 13.6-Tages-Periode in Lösung Nut2 können nur näherungsweise mit den Koeffizienten der Lösung N9 von [Biskupek \[2015\]](#) verglichen werden. In dieser Arbeit wurden die geschätzten Störrotationen und Stationskoordinaten nicht fixiert und damit unterlagen die geschätzten Nutationskoeffizienten weniger Zwängen als in der Lösung N9 von [Biskupek \[2015\]](#).

Tab. 5.11: Nutationskoeffizienten des MHB2000-Modells und korrespondierende Differenzen der Lösungen Nut1 und Nut2 mit 1σ -Genauigkeit aus der Ausgleichung. Zum Vergleich sind die Differenzen der Lösung N6 (Perioden >13.6 Tage) und N9 (Periode 13.6 Tage) aus [Biskupek \[2015\]](#) mit angegeben (ohne Genauigkeitsangabe).

Periode	MHB2000 [mas]	N6/N9 [mas]	Δ Nut1 [mas]	Δ Nut2 [mas]	
18.6 a	A	-17206.42	1.89	0.17 ± 0.17	0.40 ± 0.17
	B	9205.23	-0.22	0.05 ± 0.06	0.02 ± 0.06
	A''	3.34	-3.71	0.67 ± 0.14	0.74 ± 0.14
	B''	1.54	-1.35	0.28 ± 0.06	0.28 ± 0.06
9.3 a	A	207.46	-0.88	-0.94 ± 0.11	-1.14 ± 0.12
	B	-89.75	-0.57	-0.55 ± 0.05	-0.65 ± 0.05
	A''	-0.07	-1.74	-1.04 ± 0.11	-1.25 ± 0.12
	B''	-0.03	-0.18	-0.07 ± 0.05	0.00 ± 0.05
365.3 d	A	147.59	-1.47	-0.29 ± 0.08	-0.50 ± 0.08
	B	7.39	0.58	-0.06 ± 0.03	-0.06 ± 0.04
	A''	1.12	-1.47	0.14 ± 0.06	0.20 ± 0.06
	B''	-0.19	-0.04	-0.01 ± 0.02	-0.04 ± 0.02
182.6 d	A	-1317.09	-1.49	0.49 ± 0.06	0.58 ± 0.07
	B	573.03	0.08	0.07 ± 0.02	0.12 ± 0.02
	A''	-1.37	1.22	-0.01 ± 0.06	-0.05 ± 0.06
	B''	-0.46	-0.08	0.04 ± 0.02	0.00 ± 0.03
13.6 d	A	-227.64	1.30	-	0.60 ± 0.24
	B	97.85	-0.69	-	-0.08 ± 0.10
	A''	0.28	-4.58	-	-0.83 ± 0.29
	B''	0.14	-2.54	-	-0.21 ± 0.11

Die Abweichungen zum MHB2000-Modell wurden in beiden Berechnungsvarianten im Vergleich zur Lösung von Biskupek [2015] verringert. Die größten Abweichungen treten für die Koeffizienten der 9.3-Jahres-Periode auf, besonders in den A -Komponenten der Nutation in Länge. In Lösung Nut1 weisen die Koeffizienten A und A'' eine Abweichung von rund -1 mas auf, in Lösung Nut2 bis zu -1.25 mas. Für alle anderen Koeffizienten sind die Abweichungen zum MHB2000 in beiden Varianten teilweise deutlich kleiner als 1 mas. In der 18.6-Jahres-Periode zeigt der *out-of-phase* Koeffizient A'' die größte Abweichung von 0.67 mas in Lösung Nut1 und 0.74 mas in Nut2, während die Koeffizienten der jährlichen und halbjährlichen Perioden die größte Differenz in den *in-phase* Termen A zeigen. Die berechneten 1σ -Standardabweichungen aus der Ausgleichung sind im Vergleich zu Biskupek [2015] nur wenige hundertstel Millibogensekunden geringer.

Wenn die Koeffizienten der 13.6-Tages-Periode mitgeschätzt werden, erhöhen sich nahezu an allen anderen Koeffizienten die Differenzen zum Modellwert. Im Gegensatz zu den anderen Perioden weisen die *in-phase* und *out-of-phase* Koeffizienten der 13.6-Tages-Periode sehr hohe Korrelationen von -0.94 und 0.96 untereinander auf, sodass die einzelnen Komponenten nicht gut zu bestimmen sind. Die Korrelationen zu den Koeffizienten der anderen Perioden sind mit maximal 20 % gering, einzig zu $A_{9.3a}$ und $B_{9.3a}$ treten Korrelationen bis 50 % auf. Höhere Korrelationen werden von $A_{13.6d}$ und $A''_{13.6d}$ mit der Störrotation Θ_x (70 %) sowie von $B_{13.6d}$ und $B''_{13.6d}$ mit $\dot{\Theta}_x$ (90 %) erreicht. Weiterhin ist die y -Komponente der OCA-Koordinaten mit 68 % und die x -Komponente der APOLLO-Koordinaten mit 57 % mit den *out-of-phase* Koeffizienten der 13.6-Tages-Periode korreliert. Diese Korrelationen beeinträchtigen die Schätzung aller Nutationskoeffizienten in Variante Nut2. Weitere genaue Daten, zum Beispiel von APOLLO und OCA, können dazu beitragen, dass auch die Koeffizienten der 13.6-Tages-Periode in Zukunft zusammen mit den anderen Perioden in einer höheren Genauigkeit bestimmt werden können. Mit dem vorliegenden Datensatz ist es auch in der neuen Programmversion besser, die 13.6-Tages-Koeffizienten auf dem Modellwert zu fixieren.

In der Lösung Nut1 sind die Korrelationen der Nutationskoeffizienten untereinander überwiegend gering. Die größten Korrelationen von rund 50 % bestehen zwischen den Koeffizienten $A_{18.6a}$ und $B_{18.6a}$, $A''_{18.6a}$ und $B''_{18.6a}$, $A_{9.3a}$ und $B_{9.3a}$, $A''_{9.3a}$ und $B''_{9.3a}$ sowie $A_{365.3d}$ und $B_{365.3d}$. Alle Koeffizienten der 9.3-Jahres-Periode sind bis zu 40 % mit den Koeffizienten der 18.6-Jahres-Periode korreliert. Bezüglich der Störrotationen treten die größten Korrelationen von 29 % zwischen $A_{18.6a}$ und $\dot{\Theta}_y$ und 32 % zwischen $B''_{9.3a}$ und Θ_x auf, alle anderen Korrelationen liegen unter 20 %. Die *in-phase* Koeffizienten der 365.3-Tages-Periode sind zu 50 % mit GM_{E+M} und damit auch zu den x -Komponenten der Reflektorkoordinaten korreliert. Die *in-phase* Koeffizienten der 18.6-Jahres-Periode zeigen eine Korrelation von maximal 40 % mit den z -Koordinaten der Reflektoren, während die *out-of-phase* Koeffizienten mit bis zu 75 % mit der z -Komponente der initialen Mondposition korreliert sind. Alle anderen Korrelationen, insbesondere zu den Stationskoordinaten und Dissipationsparametern von Erde und Mond sind sehr gering mit Werten unter 25 %.

Die Schätzung der Nutationskoeffizienten führt zu einer Änderung der Transformation zwischen dem erdfesten und raumfesten Referenzsystem. Die in der Auswertung ebenfalls mitgeschätzten Koordinaten der Stationen und Reflektoren erhalten ebenfalls kleine Zuschläge im Vergleich zur Lösung ohne Nutationsschätzung. In Tabelle 5.12 sind die Zuschläge zu den geschätzten Stationskoordinaten aus Tabelle 5.4 und den Reflektorkoordinaten aus Tabelle 5.13 angegeben, wenn die Koeffizienten der Variante Nut1 mitgeschätzt werden. Die Koordinaten der Stationen McDonald, LURE und OCA ändern sich in der x - und y -Komponente um maximal 3 mm, während die z -Komponenten bei McDonald und OCA mit bis zu 6 mm etwas stärker beeinflusst werden. Bei APOLLO und MLRO treten in der x -Komponente etwas größere Änderungen bis zu 10 mm auf, während sich die z -Komponente um einen Betrag von 18 mm ändert. Bei den Reflektorkoordinaten zeigt sich eine systematische Verschiebung aller Reflektorkoordinaten in der x - y -Ebene von rund 7 cm in die gleiche Richtung. In der z -Koordinate streuen die Änderungen zwischen 1.6 cm und 13.9 cm mit einer systematischen Verschiebung in positive z -Richtung. Als Ursache der größten

Tab. 5.12: Änderungen in den Stations- und Reflektorkoordinaten bei Schätzung von Nutationskoeffizienten der Variante *Nut1* bezüglich der Koordinatenbestimmung ohne Nutationsschätzung in Tabelle 5.4 und 5.13. Die McDonald-Stationen sind unter MLRS2 zusammengefasst.

	Δx [m]	Δy [m]	Δz [m]
MLRS2	-0.001	0.003	0.006
LURE	0.003	0.001	-0.002
OCA	-0.001	-0.001	0.004
APOLLO	0.010	-0.003	-0.018
MLRO	-0.006	-0.001	0.018
A11	-0.045	0.061	0.031
A14	-0.028	0.066	0.016
A15	-0.040	0.059	0.091
L1	-0.028	0.053	0.139
L2	-0.049	0.049	0.093

Verschiebungen wird die hohe Korrelation der Nutationskoeffizienten mit einer Periode von 18.6 Jahren mit der z-Komponente der Mondbahn vermutet, wobei künftig weitere Untersuchungen zur Schätzung der Nutationskoeffizienten mit den Koordinaten folgen sollten.

5.5 Reflektorkoordinaten als Realisierung des SRS

Die LLR-Retroreflektoren bilden den selenozentrischen Referenzrahmen (SRF) und stellen momentan die einzigen fünf Bodenpunkte für eine genaue Realisierung des SRS dar, deren Genauigkeit im Bereich eines Dezimeters liegt. Die Reflektoren dienen als Grundlage für hochauflösende Kartierungen im SRF. Als Beispiel sei die Verwendung als Kontroll- und Passpunkte für Aufnahmen des Lunar Reconnaissance Orbiters (LRO) [Löcher u. a., 2015] sowie für die Selenoreferenzierung von Fotografien der Astronauten auf der Mondoberfläche in Kombination mit LRO-Bilddaten und den selenozentrischen Positionen der in den Aufnahmen enthaltenen Reflektoren genannt [Haase u. a., 2012]. Über die Reflektorkoordinaten kann das SRF mit dem ICRF verbunden werden, was in Zukunft über mögliche VLBI-Messungen zu Laserreflektor/Radiotransponder-Kombinationen erweitert werden kann. Eine genaue Kenntnis der Reflektorkoordinaten erlaubt eine bessere Beobachtung der Bewegung des Mondes und Rückschlüsse auf physikalische Mondparameter wie Gezeitenparameter, Mondrotation und Informationen über das Mondinnere. In Kapitel 5.5.1 sind die geschätzten Reflektorkoordinaten im HAS und die abgeleiteten Koordinaten im Mean-Earth/Rotation Axis (ME)-System angegeben. Änderungen in der Modellierung führen in der Analyse zu Änderungen in den geschätzten Parametern. In Kapitel 5.5.2 ist beispielhaft die Änderung in den Reflektorkoordinaten dargestellt, die sich aus der Erweiterung der Modellierung um die Wechselwirkung der Planeten und Sonne mit dem Mondschwerefeld ergibt.

5.5.1 Koordinaten im Hauptachsen- und Mean-Earth-System

Die geschätzten Reflektorkoordinaten in Tabelle 5.13 stammen aus der gleichen Lösung, mit der die Stationskoordinaten in Tabelle 5.4 geschätzt wurden. Die Geschwindigkeit der Stationen Haleakala und MLRO wurden auf die ITRF-Werte fixiert und die Nutation komplett über das MHB2000-Modell realisiert, ohne Schätzung von Nutationskoeffizienten. Die Reflektorkoordinaten beziehen sich auf das in der Ephemeridenrechnung verwendete HAS.

Der Vergleich mit den Koordinaten der DE430-Lösung in Williams u. a. [2013] zeigt Differenzen bis zu 0.6 m. Die Reflektorkoordinaten zeigen Korrelationen mit nahezu allen die Ephemeridenrechnung betreffenden dynamischen Parametern. Die Startwerte der Mondposition und -geschwindigkeit

Tab. 5.13: Geschätzte tide-free-Reflektorkoordinaten $\mathbf{x}_{Ref} = [x \ y \ z]^T$ und 1σ -Genauigkeiten im HAS mit Differenzen zu den DE430-Koordinaten $\Delta_{DE} = \mathbf{x}_{Ref} - \mathbf{x}_{DE}$.

	x [m]	y [m]	z [m]
A11	1591966.256 ± 0.046	690699.856 ± 0.031	21003.516 ± 0.013
A14	1652689.446 ± 0.046	-520996.921 ± 0.031	-109730.668 ± 0.013
A15	1554678.168 ± 0.045	98096.090 ± 0.029	765004.897 ± 0.024
L1	1114292.412 ± 0.044	-781297.959 ± 0.025	1076058.404 ± 0.029
L2	1339363.120 ± 0.045	801872.418 ± 0.028	756358.360 ± 0.025
A11 Δ_{DE}	-0.294	0.481	-0.350
A14 Δ_{DE}	-0.058	0.604	-0.251
A15 Δ_{DE}	-0.063	0.605	-0.458
L1 Δ_{DE}	0.199	0.551	-0.468
L2 Δ_{DE}	-0.198	0.556	-0.489

Tab. 5.14: Parameter der Helmerttransformation zur DE430-Lösung der Reflektorkoordinaten, bezogen auf die Mondoberfläche.

Parameter	[m]
d_x	0.053 ± 0.043
d_y	0.226 ± 0.049
d_z	-0.228 ± 0.059
r_x	0.087 ± 0.042
r_y	-0.139 ± 0.068
r_z	-0.377 ± 0.050
μ	-0.195 ± 0.040

weisen mit einzelnen Komponenten der Koordinaten Korrelationen bis zu 50 % auf. Der Potentialkoeffizient C_{32} ist mit den z-Koordinaten von A11 und A14 zu 70 % korreliert, die y-Koordinaten sind mit τ_m rund 65 % und mit K_v/C_M zu 65 % korreliert. Die Masse des Erde-Mond-Systems GM_{E+M} ist zu über 90 % mit den x-Koordinaten korreliert. Die Parameter τ'_{21} und τ'_{22} sowie β_M^{tf} zeigen Korrelationen bis zu 30 % und die Startwerte der Mantel- und Kernrotationsvektoren sind bis zu 60 % in einzelnen Koordinatenkomponenten korreliert.

Die vielfältigen Korrelationen zeigen, dass die Reflektorkoordinaten stark mit der entsprechenden Ephemeride zusammenhängen und nicht unabhängig davon interpretiert werden sollten. Um die Geometrie des Reflektornetzwerkes mit der DE430-Ephemeride zu vergleichen, wurde analog zu Kapitel 5.3 eine Helmerttransformation zwischen den Koordinatensätzen bestimmt. In Tabelle 5.14 sind die Parameter der Transformation angegeben, wobei die Rotationen und der Maßstabsfaktor auf die Mondoberfläche durch Multiplikation mit R_M umgerechnet wurden. Die Differenzen zur DE430-Lösung nach der Transformation sind in Tabelle 5.15 angegeben und zeigen wesentlich geringere Abweichungen als vor der Transformation. Sie entsprechen im Durchschnitt etwa der 1.5-fachen mittleren 3D-Standardabweichung der Reflektorkoordinaten. Somit passen beide Netze im Rahmen der Genauigkeit gut zusammen.

Neben dem HAS wird auch das ME-System verwendet, das oft bei kartografischen Anwendungen zum Einsatz kommt, zum Beispiel in [Goddard \[2008\]](#) und [Archinal u. a. \[2011a,b\]](#). Der Ursprung beider Systeme liegt im Massenzentrum des Mondes. Die z-Achse des ME-Systems stellt die mittlere Rotationsachse dar, die x-Achse ist rechtwinklig dazu ausgerichtet und schneidet den Nullmeridian, der die mittlere Richtung zur Erde zeigt. Die y-Achse vervollständigt das Rechtssystem. Die Achsen von HAS und ME-System liegen nah beieinander, sind aber nicht identisch. Der Unterschied zwischen den Systemen wird durch das Mondgravitationsfeld ab Grad 3 und durch Dissi-

Tab. 5.15: Differenzen der Reflektorkoordinaten zur DE430-Lösung nach der Helmerttransformation

	Δx [m]	Δy [m]	Δz [m]
A11	-0.020	-0.014	0.042
A14	-0.029	-0.038	0.071
A15	0.019	0.014	-0.015
L1	0.016	-0.058	-0.069
L2	0.014	0.091	-0.029

Tab. 5.16: Abweichung der Achsen von \mathbf{x}_{ME} und $\boldsymbol{\omega}_m$ bezüglich des HAS als Winkel und im metrischen Maß an der Mondoberfläche.

	\mathbf{x}_{ME}		$\boldsymbol{\omega}_m$	
	y	z	x	y
Abweichung in ["]	-66.791	78.963	-78.689	0.262
Abweichung in [m]	-562.78	665.35	-663.04	2.21

pationseffekte hervorgerufen [Williams u. a., 2013]. In Williams u. a. [2013] wurden die konstanten Rotationswinkel zwischen dem HAS und ME-System aus der Fourieranalyse der Eulerwinkel einer Langzeitephemeride über 1070 Jahre extrahiert.

In dieser Arbeit wurde ein einfacherer Ansatz verwendet, um die Rotation zwischen den Systemen zu bestimmen. Aus einer Langzeitephemeride über 710 Jahre wurde der Rotationsvektor des Mantels $\boldsymbol{\omega}_m$ und der Richtungsvektor vom Selenozentrum zum Geozentrum \mathbf{x}_{ME} alle 0.1 Tage im HAS berechnet. Die x-, y- und z-Komponenten der anschließend normierten Vektoren wurden gemittelt. Die Bewegung der x-Achse des ME-Systems wird durch die Bewegung der y- und z-Komponenten von \mathbf{x}_{ME} bezüglich der x-Achse des HAS und die Bewegung der Rotationsachse durch die Bewegung der x- und y-Komponente von $\boldsymbol{\omega}_m$ bezüglich der z-Achse des HAS beschrieben. Die Bewegung von \mathbf{x}_{ME} im HAS ist mit ± 246 km in y- und ± 208 km in z-Richtung an der Mondoberfläche wesentlich größer als die Bewegung von $\boldsymbol{\omega}_m$ in der Größenordnung von rund 2 km. Die Ursache liegt in der elliptischen und zur Ekliptik geneigten Bahn des Mondes in Verbindung mit der nahezu konstanten Rotationsrate, sodass \mathbf{x}_{ME} je nach Stellung des Mondes etwas „vor“ oder „nach“ dem HAS-Nullmeridian beziehungsweise etwas „über“ oder „unter“ dem HAS-Äquator zur Erde zeigt. Von der Erde aus betrachtet führt das zu einem „eiern“ des Mondes und wird als optische Libration bezeichnet. Um mögliche systematische Effekte auf die Mittelwerte zu reduzieren, wurden diese mehrfach, aus unterschiedlich langen Zeitspannen der Ephemeride berechnet. Die Anfangs- und Endzeiten der Ephemeridenstücke bestimmten sich aus den Zeitpunkten, in denen die Abweichung der x-Achsen des ME-Systems und HAS kleiner als 2 km an der Mondoberfläche war und somit die optische Libration nahe dem Wert 0 liegt. Eine weitere Bedingung legte die Mindestlänge des zu mittelnden Ephemeridenstückes zu 500 Jahren fest.

In Tabelle 5.16 sind die Abweichungen der gemittelten ME-Achsen von den Achsen des HAS an der Mondoberfläche in Bogensekunden und im metrischen Maß angegeben. Die Differenz zwischen der z-Komponente von \mathbf{x}_{ME} und der x-Komponente von $\boldsymbol{\omega}_m$ wird vermutlich durch verbleibende Systematiken in der Mittelbildung hervorgerufen. Als Ursache sind sehr langperiodische Änderungen denkbar, die über das betrachtete Ephemeridenstück nicht oder nur ungenügend herausgemittelt wurden. Bei exakter Rechtwinkligkeit der Achsen müssen die beiden Komponenten nahezu identisch sein, da es sich bei allen Winkeln um sehr kleine Größen handelt.

Aus den x- und y-Komponenten des gemittelten Rotationsvektors sowie der y-Komponente der mittleren Erdrichtung kann die Transformation vom HAS in das ME zu

$$\mathbf{x}_{ME} = \mathbf{R}_x(-0.262'')\mathbf{R}_y(-78.689'')\mathbf{R}_z(-66.791'')\mathbf{x}_{HAS} \quad (5.10)$$

Tab. 5.17: *Geschätzte Reflektorkoordinaten $\mathbf{x}_{Ref} = [xyz]^T$ im ME-System mit Differenzen zu den DE430-Koordinaten $\Delta_{DE} = \mathbf{x}_{Ref} - \mathbf{x}_{DE}$.*

		x [m]	y [m]	z [m]
A11		1591750.413	691215.291	20397.151
A14		1652816.082	-520461.593	-110361.878
A15		1554938.054	98598.537	764411.877
L1		1114955.777	-780938.463	1075632.140
L2		1339391.843	802305.118	755848.463
A11	Δ_{DE}	2.337	-5.552	-1.269
A14	Δ_{DE}	-2.090	-5.675	-1.065
A15	Δ_{DE}	0.714	-5.204	-1.291
L1	Δ_{DE}	-2.194	-3.554	-0.969
L2	Δ_{DE}	3.242	-4.436	-1.287

abgeleitet werden. Die Koordinaten der Reflektoren im ME-System wurden mit Gleichung (5.10) aus den HAS-Werten berechnet und in Tabelle 5.17 mit den Differenzen zu den ME-Koordinaten der DE430-Ephemeride zusammengefasst. Die Differenzen zur DE-Ephemeride betragen für die Rotationswinkel (vom HAS in das ME-System) um die x-, y- und z-Achse $0.023''$, $-0.109''$ und $0.782''$. Der Winkel von $1''$ entspricht 8.43 m an der Mondoberfläche, bei einem Radius $R_M = 1738$ km. Die Differenz der ME-Koordinaten vergrößert sich im Vergleich zu den HAS-Koordinaten auf bis zu 5.7 m in der y-Komponente. Wie auch die HAS-Koordinaten sind die ME-Koordinaten mit der zugrundeliegenden Ephemeride verbunden und zusätzlich mit der Methode der Bestimmung der Rotationswinkel zwischen den Systemen. Die Genauigkeit der ME-Koordinaten ist daher schlechter als die der HAS-Koordinaten. Die Differenzen zur DE430-Lösung erhöhen sich beim Übergang vom HAS auf das ME-System etwa um den Faktor 10. Dieser Faktor kann als Obergrenze der Koordinatengenauigkeit bezüglich der Werte im HAS angenommen werden.

5.5.2 Änderungen in den Reflektorkoordinaten durch Wechselwirkung der Planeten und der Sonne mit dem Mondschwerefeld

Wie in Kapitel 4.2.1 beschrieben, wurde das Ephemeridenmodell für die Mondtranslation und -rotation um Terme erweitert, die die Berücksichtigung von Beschleunigungen aus der Wechselwirkung des Mondschwerefeldes von Grad und Ordnung 3 mit der Sonne und mit dem Mondschwerefeld von Grad und Ordnung 2 mit den Planeten Merkur bis Saturn ermöglichen. Der Effekt auf die Residuen ist in Kapitel 4.2.1 dargestellt. Die in der Auswertung geschätzten Reflektorkoordinaten ändern sich in der Größenordnung von einigen Millimetern. Tabelle 5.18 listet den mittleren Betrag der 3D-Koordinatenänderung aller fünf Reflektoren $|\Delta\mathbf{x}_{Ref}|$ nach dem jeweils verursachenden Planeten und der Sonne getrennt auf. Analog zur Mondephemeride in Kapitel 4.2.1 hat Venus mit 6.1 mm den größten Einfluss auf die Reflektorkoordinaten. Auch wenn die Änderungen der Reflektorkoordinaten unter der berechneten 1σ -Genauigkeit der 3D-Koordinate von etwa 5.8 cm liegen, können zukünftige Messungen zu Einzelprisma-Reflektoren oder von Lasertranspondern diesen Genauigkeitsbereich erreichen. Für eine Realisierung des SRS im mm-Bereich, müssen die planetaren Effekte von Venus und Jupiter sowie der Sonne mit dem Schwerfeld bis Grad und Ordnung 3 mitmodelliert werden.

Tab. 5.18: Betrag der 3D-Änderung der Reflektorkoordinaten $|\Delta \mathbf{x}_{Ref}|$ (gemittelt über alle 5 Reflektoren) nach Erweiterung der Ephemeridenrechnung um den gravitativen Effekt der einzelnen Planeten mit dem Mondschwerefeld von Grad und Ordnung 2 sowie der Sonne mit dem Mondschwerefeld von Grad und Ordnung 3.

	Sonne	Merkur	Venus	Mars	Jupiter	Saturn	kombiniert
$ \Delta \mathbf{x}_{Ref} $ [mm]	0.85	0.05	6.10	0.20	2.73	0.26	4.13

Tab. 5.19: Schätzung der zeitlichen Verzögerung τ'_{21} und τ'_{22} der Erdgezeiten. Das Erdschwerefeld wurde durch rein zonale Terme (z) bis Grad und Ordnung 6 bzw. durch das komplette Feld des Grades 2 und zonale Terme von Grad 3 bis 6 (z+) modelliert. DE430 bezeichnet den verwendeten Wert aus der DE430-Ephemeride. Weiterhin sind die innere 1σ -Genauigkeit, die Rechenzeit für ein 10-jähriges Ephemeridenstück t_{Eph}^{10a} und die Verbesserungsquadratsumme $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ nach der Ausgleichung angegeben.

Nr.	τ_{20}	τ_{21}	τ_{22}	τ'_{21} [s]	τ'_{22} [s]	t_{Eph}^{10a} [min]	$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$
1 (z)	DE430	τ'_{21}	τ'_{22}	912.0 ± 6.3	561.0 ± 0.5	42	60430.8
2 (z+)	DE430	τ'_{21}	τ'_{22}	913.0 ± 6.3	560.9 ± 0.5	60	60441.8
3 (z)	0	τ'_{21}	τ'_{22}	847.3 ± 6.3	563.4 ± 0.5	41	60324.9
4 (z+)	0	τ'_{21}	τ'_{22}	848.7 ± 2.9	563.3 ± 0.5	60	60342.5
5 (z)	DE430	DE430	DE430	529.5 ± 2.9	216.8 ± 0.5	61	60130.6
6 (z+)	DE430	DE430	DE430	530.2 ± 5.8	216.8 ± 0.5	80	60134.0
7 (z)	0	DE430	DE430	469.8 ± 5.8	219.1 ± 0.5	64	60161.8
8 (z+)	0	DE430	DE430	470.7 ± 5.8	219.0 ± 0.5	80	60173.8
9 (z+)	DE430	τ'_{21}	τ'_{22}	913.0 ± 6.3	560.9 ± 0.5	68	60441.2
10 (z+)	DE430	DE430	DE430	530.5 ± 5.8	216.8 ± 0.5	81	60132.0

5.6 Zeitverzögerung der Erdgezeiten

Die erweiterte Modellierung der gezeitenbedingten Deformation der Erde in Kapitel 4.2.5 erlaubt die Berechnung der Parameter τ_{2m} zur Bestimmung des zeitverzögerten Eintretens der Deformation. Von den maximal fünf verwendeten Parametern τ_{20} , τ_{21} , τ_{22} , τ'_{21} und τ'_{22} in Gleichung (4.47) werden in der Analyse die Rotationsverzögerungen τ'_{21} und τ'_{22} bestimmt. Die Werte $\tau_{20} = 0.064$ d, $\tau_{21} = -0.044$ d und $\tau_{22} = -0.1$ d sind der DE430-Ephemeride entnommen und wurden aus einem kombinierten Gezeitenmodell für die feste Erde und Ozeangezeiten berechnet [Williams u. a., 2013; Williams und Boggs, 2016].

Tabelle 5.19 fasst verschiedene Schätzungen für τ'_{21} und τ'_{22} zusammen. In diesen Ergebnissen ist das Modell der Mondrotation nach Kapitel 4.3 nicht berücksichtigt. Zum Vergleich finden sich am Ende des Kapitels die Ergebnisse für Nummer 5 (Tabelle 5.19) mit neu modellierter Rotation. Die partiellen Ableitungen wurden durch numerische Differentiation mit den Schrittweiten von 0.002 Tagen für $\Delta \tau'_{21}$ und 0.001 Tagen für $\Delta \tau'_{22}$ erzeugt und die Parameterschätzung für die beiden zusätzlichen Parameter angepasst. Für die Schätzungen von Nummer 1 bis 8 wurde aus der Gezeitendeformation der Erde direkt der resultierende Beschleunigungsanteil, Gleichung (4.52), berechnet. Für die Schätzungen ab Nummer 9 erfolgte die Modellierung über die variablen Potentialkoeffizienten mit Gleichung (4.45). Als gezeitenerzeugende Körper wurden Mond und Sonne berücksichtigt.

Die Schätzungen mit den Nummern 1 bis 4 orientieren sich an der Modellierung der in der DE421 verwendeten Gezeitenbeschleunigung [Standish und Williams, 2012]. Darin ist $\tau'_{2x} = \tau_{2x}$ und der Wert für τ_{20} entspricht dem DE430-Wert. Die Modellierung in Schätzung Nummer 1 ist analog zur DE421-Ephemeride und zeigt gegenüber den DE421-Werten ($\tau_{21}^{DE421} = 962$ s, $\tau_{22}^{DE421} = 568$ s) für τ_{21} eine Abweichung von rund 5%, während τ_{22} sehr nah am DE421-Wert liegt. Interessan-

terweise verbessert sich der $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ -Wert leicht, wenn $\tau_{20} = 0$ verwendet wird und er verbessert sich nicht, wenn anstelle des zonalen Erdschwerefeldes vom Grad 2 das komplette Grad-2-Feld verwendet wird. Möglicherweise wirken sich hier Modellierungsungenauigkeiten an anderen Stellen im Ephemeridenprogramm auf das Ergebnis aus.

Die Schätzungen mit den Nummern 5 bis 8 verwenden die in der DE430 implementierte Gezeitenbeschleunigung mit festen Orbitverzögerungen τ_{21} und τ_{22} nach Gleichung (4.47). Die Modellierung in Schätzung Nummer 5 ist analog zur DE430-Ephemeride ($\tau'_{21}{}^{DE430} = 636$ s, $\tau'_{22}{}^{DE430} = 219$ s). Der geschätzte Wert für τ'_{21} ist um 17 % kleiner als der DE430-Wert, während τ'_{22} nahezu identisch ist. Es ergibt sich ebenfalls ein geringfügig verminderter $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ -Wert bei der rein zonalen Modellierung des Erdschwerefeldes im Vergleich zur zusätzlichen kompletten Grad-2 Lösung. Eine Berechnung mit $\tau_{20} = 0$ führt zu keiner Verbesserung in der Ausgleichung.

Der Unterschied in den Werten von τ'_{21} und τ'_{22} zwischen DE421 und DE430 liegt in der unterschiedlichen Modellierung der Orbit- und Rotationsverzögerung. Vereinfachend kann aus den einzelnen Verzögerungen der Längenunterschied des globalen „Gezeitenberges“ zur geografischen Lage der Mondposition berechnet werden. In Abbildung 4.10 entspricht dieser Wert der Differenz $\lambda_j(t - \tau'_{lm}) - \lambda_j(t)$. Es wird die siderische Rotationsgeschwindigkeit der Erde von $\omega_{sid}^E = 359.018^\circ/d$ und die siderische Bahngeschwindigkeit des Mondes von $\omega_{sid}^M = 13.176^\circ/d$ für die Abschätzung angenommen. Der Gesamteffekt setzt sich aus einem Erd- und Mondanteil mit $\Delta\lambda = \Delta\lambda^E - \Delta\lambda^M$ zusammen. Für die Modellierung nach DE421, mit gleicher Orbit- und Rotationsverzögerung, ergibt sich für die frequenzabhängigen Verzögerungen $\Delta\lambda_{21}^{DE421} = 3.85^\circ$ und $\Delta\lambda_{22}^{DE421} = 2.35^\circ$. Mit der Modellierung mit unterschiedlichen Rotations- und Orbitverzögerungen nach DE430 ergibt sich $\Delta\lambda_{21}^{DE430} = 3.22^\circ$ und $\Delta\lambda_{22}^{DE430} = 2.23^\circ$. Die Werte zeigen, dass beide Modelle den annähernd gleichen Längenunterschied des „Gezeitenberges“ beschreiben.

Die Schätzungen Nummer 9 und 10 basieren auf den Nummern 2 und 6 und können mit diesen verglichen werden. Wenn die Gezeitendeformation der Erde über Änderungen in den Potentialkoeffizienten vom Grad 2 beschrieben wird, ist eine rein zonale Modellierung des Erdschwerefeldes nicht sinnvoll, sodass hier nur die Analyse mit dem kompletten Grad 2 durchgeführt wurde. Trotz der theoretisch vollständigeren Modellierung (Kapitel 4.2.5), ergeben sich nur minimale Verbesserungen in den $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ -Werten der Ausgleichung. Die benötigte Rechenzeit für ein 10-jähriges Ephemeridenstück ist identisch mit der Modellierung über die Beschleunigungsterme.

Die verfeinerte Modellierung der gezeitenbedingten Deformation der Erde und ihr Effekt auf die Mondephemeride ermöglicht eine verbesserte Analyse der LLR-Messungen. Die Verbesserungsquadratsumme $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ wurde von rund 63200 auf unter 60500 gesenkt. Die Trennung der neu eingeführten Zeitverzögerungen τ_{2x} in mitgeschätzte Rotationsverzögerungen und Übernahme der festen Orbitverzögerungen aus der DE430-Ephemeride, führt gegenwärtig zur besten Modellierung der Effekte der Erdgezeiten auf die Mondephemeride. Um die Rechenzeit für eine Ephemeridenberechnung möglichst gering zu halten, wird die Berechnung Nummer 5 aus Tabelle 5.19 in der neuen Programmversion verwendet. Die in Tabelle 5.19 angegebenen inneren 1σ -Genauigkeiten stellen nur eine Abschätzung dar. Sie hängen vom verwendeten Modell und den jeweiligen partiellen Ableitungen ab, die jedoch nicht für jede Iteration in der Ausgleichung neu berechnet wurden. In der Zusammenstellung der Ergebnisse in Tabelle A.9 sind die endgültigen Genauigkeiten angegeben.

Neben Sonne und Mond rufen auch alle anderen Körper Gezeiten auf der Erde hervor. Allerdings ist deren Effekt auf die Mondephemeride zu vernachlässigen. Durch Venus und Jupiter ergeben sich Änderungen von unter 0.1 mm im Erde-Mond-Abstand über einen Zeitraum von 46 Jahren.

Die Modellierung der Mondrotation mit festem Mantel und flüssigen Kern nach Kapitel 4.3 führt zu Änderungen in den geschätzten Zeitverzögerungen. Die Modellierung über Variante 5 aus Tabelle 5.19 wurde im neuen Rotationsmodell beibehalten. Der geschätzte Wert für die Verzögerung der täglichen Gezeiten erhöhte sich auf $\tau'_{21} = 574.8$ s und der Wert für die halbtäglichen Gezeiten auf $\tau'_{22} = 226.0$ s. Der Unterschied zur DE430-Ephemeride wird für τ'_{21} auf 10 % verringert, für τ'_{22}

Tab. 5.20: Unnormierte Potentialkoeffizienten, dynamische Abplattungen und Gesamtmasse des Erde-Mond-Systems GM_{E+M} mit ihren formalen 1σ -Fehlern im Vergleich zu den Werten der DE430-Ephemeride und den Referenz-Potentialkoeffizienten aus der GRAIL-Mission. Aus anderen, ebenfalls geschätzten, Größen berechnete Werte sind mit ^(a) gekennzeichnet.

	diese Arbeit	DE430	GRAIL
C_{22}^{tf}	$(2.237347 \pm 0.000005) \times 10^{-5}$	2.238274×10^{-5} ^(a)	2.238184×10^{-5}
C_{32}	$(4.842937 \pm 0.00009) \times 10^{-6}$	4.844942×10^{-6}	4.840499×10^{-6}
C_{33}	$(1.716190 \pm 0.00097) \times 10^{-6}$	1.675618×10^{-6}	1.711660×10^{-6}
S_{32}	$(1.681990 \pm 0.00016) \times 10^{-6}$	1.684474×10^{-6}	1.666142×10^{-6}
β_M^{tf}	$(631.1700 \pm 0.0001) \times 10^{-6}$	631.0213×10^{-6}	-
γ_M^{tf}	227.7080×10^{-6} ^(a)	227.7317×10^{-6}	-
GM_{E+M} [km ³ /s ²]	403503.23526 ± 0.00013	403503.235502	-

erhöht er sich leicht von 1% auf 3%. Es ist zu erwarten, dass durch eine weitere Verfeinerung des Rotationsmodells, zum Beispiel mit noch unmodellierten Librationen [Williams u. a., 2013], die Differenz von τ'_{21} zur DE430-Ephemeride abnimmt.

5.7 Lunare Potentialkoeffizienten und Masse des Erde-Mond-Systems

In der Auswertung werden die vier Potentialkoeffizienten C_{22}^{tf} , C_{32} , C_{33} und S_{32} des Mondgravitationsfeldes aus LLR-Daten geschätzt, alle anderen Koeffizienten stammen aus der GRAIL-Lösung von Konopliv u. a. [2013]. Mit der Schätzung von C_{22}^{tf} , in Verbindung mit der dynamischen Abplattung β_M^{tf} , werden die tide-free-Hauptträgheitsmomente des Mondes bestimmt (Kapitel 4.3). Der Wert für die dynamische Abplattung γ_M^{tf} wird mit Hilfe von Gleichung (4.71) berechnet und nicht als eigenständige Größe geschätzt. Die Schätzung der drei Potentialkoeffizienten vom Grad 3 ermöglicht eine bessere Anpassung des Modells und orientiert sich am Vorgehen von Williams u. a. [2013]. In Tabelle 5.20 sind die geschätzten unnormierten Potentialkoeffizienten, die dynamischen Abplattungen und die geschätzte Gesamtmasse des Erde-Mond-Systems mit ihren formalen 1σ -Genauigkeiten zusammengefasst. Zum Vergleich sind die Werte aus Folkner u. a. [2014] und Williams u. a. [2013] für die DE430-Ephemeride und Konopliv u. a. [2013] für die GRAIL-Potentialkoeffizienten als Referenzwerte angegeben.

Die Abweichungen der Potentialkoeffizienten vom Grad 3 von den GRAIL-Referenzwerten könnte auf unmodellerte Effekte in der Mondrotation zurückzuführen sein. Hohe Korrelationen bestehen zwischen C_{32} mit ω_{mx} , ψ , φ und den z-Koordinaten der A11- und A14-Reflektoren. Der tide-free Koeffizient C_{22}^{tf} ist mit C_{33} und β_M^{tf} hoch korreliert. Der Potentialkoeffizient C_{20} und die Potential-Lovezahl k_2^M des Mondes werden in der Ephemeridenrechnung auf den GRAIL-basierten DE430-Werten fixiert (Kapitel 4.3). Das ermöglicht die Kombination der GRAIL- und LLR-Ergebnisse, die zu einer verbesserten Modellierung der Mondrotation führen [Williams u. a., 2014]. Die entstehenden Zwänge bei der Bestimmung der Komponenten des Trägheitstensors und der gezeitenabhängigen Zuschläge zum Trägheitstensor beeinflussen die Schätzung von C_{22}^{tf} aus LLR-Daten und führen zu einer unrealistisch hohen Genauigkeit von 5×10^{-11} . Verglichen mit Konopliv u. a. [2013] und Manche [2011] ist der realistische Fehler etwa um den Faktor 100 größer. Verglichen mit Williams u. a. [2013] ist der formale Fehler für β_M^{tf} ebenfalls zu klein und sollte um den Faktor 30 vergrößert werden.

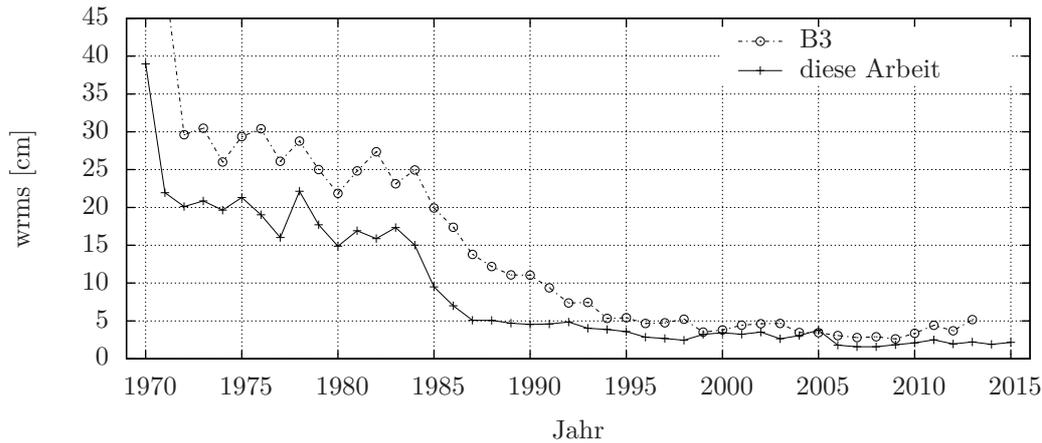


Abb. 5.2: Vergleich des jährlichen 1-Weg wrms mit der Version B3 von Biskupek [2015].

5.8 Untersuchungen der Post-fit-Residuen

Neben den geschätzten Parametern zeigen auch die Post-fit-Residuen die Genauigkeitssteigerung der in dieser Arbeit erweiterten Modellierung des Erde-Mond-Systems. Abbildung 5.2 zeigt den jährlichen wrms im Vergleich zu der in Biskupek [2015] genutzten Version B3. Der abgebildete wrms-Verlauf wurde aus den 1-Weg-Residuen aller genutzten Messwerte berechnet, die sich durch Multiplikation der tatsächlichen Laufzeitresiduen halben Lichtgeschwindigkeit ergeben.

Über die gesamte Datenreihe wurden die Residuen reduziert, bis 1990 wurde der wrms um durchschnittlich 8.5 cm verringert. In den folgenden Jahren mit genaueren Messungen wurden die verbleibenden Residuen teilweise nochmals um bis zu 3 cm reduziert. Mit der erweiterten Modellierung in dieser Arbeit beträgt der wrms in den ersten Jahren der LLR-Messungen bis 1984 zwischen 15 cm und 20 cm. In den folgenden drei Jahren fällt er auf unter 5 cm ab und erreicht zwischen 1993 und 2005 ein Niveau von 2.5 cm bis 4 cm. Ab 2006 mit dem Beginn der APOLLO-Messungen und später auch den neuen OCA-Messungen beträgt der jährliche wrms im Mittel rund 2 cm. Das Minimum wurde mit dem genutzten Datensatz in den Jahren 2007 und 2008 mit einem wrms von 1.6 cm erreicht.

Durch die Steigerung der Auswertegenauigkeit und dementsprechend verringerten Residuen, werden zusätzliche Effekte durch nicht oder ungenau modellierte Modellbestandteile sichtbar. Die Verteilung der Reflektoren (Abbildung 2.1) erlaubt Aussagen darüber, wie gut die Librationsbewegung des Mondes modelliert ist. Die untersuchte Zeitspanne erstreckt sich auf die insgesamt genaueren Messungen ab 1990. Davor sind die Residuen größer, sodass mögliche Unterschiede zwischen den einzelnen Reflektoren schlechter oder gar nicht sichtbar sind. Die Zeitreihe mit dem L1-Reflektor ist kürzer, da die genaue Position des Rovers erst 2010 durch Beobachtungen des LRO-Orbiters bestimmt wurde. Nach der erfolgreichen Beobachtung der APOLLO-Station konnte dieser Reflektor in den regulären Messbetrieb aufgenommen werden [Murphy u. a., 2011].

In Abbildung 5.3 sind jeweils die Residuen von zwei Reflektoren mit ähnlicher selenozentrischer Länge, A14 und L1 sowie A11 und L2, zum Vergleich in einem Diagramm dargestellt. Die Residuen zeigen in beiden Diagrammen in guter Übereinstimmung den gleichen zeitlichen Verlauf. Als Maß der Übereinstimmung wurde der empirische Korrelationskoeffizient r_{12} nach Niemeier [2002] zwischen den Residuen der Reflektoren berechnet. Die Residuen der Reflektoren liegen zu unterschiedlichen Zeitpunkten und in unterschiedlichen Häufigkeiten vor. Um eine vergleichbare Basis für die Berechnung des Korrelationskoeffizienten zu erzeugen, wurden aus den Residuen Mittelwerte über einen Monat gebildet. Die n Mittelwerte $\mathbf{x}_{Ref1,1..n}$ und $\mathbf{x}_{Ref2,1..n}$ für zwei Reflektoren gehen

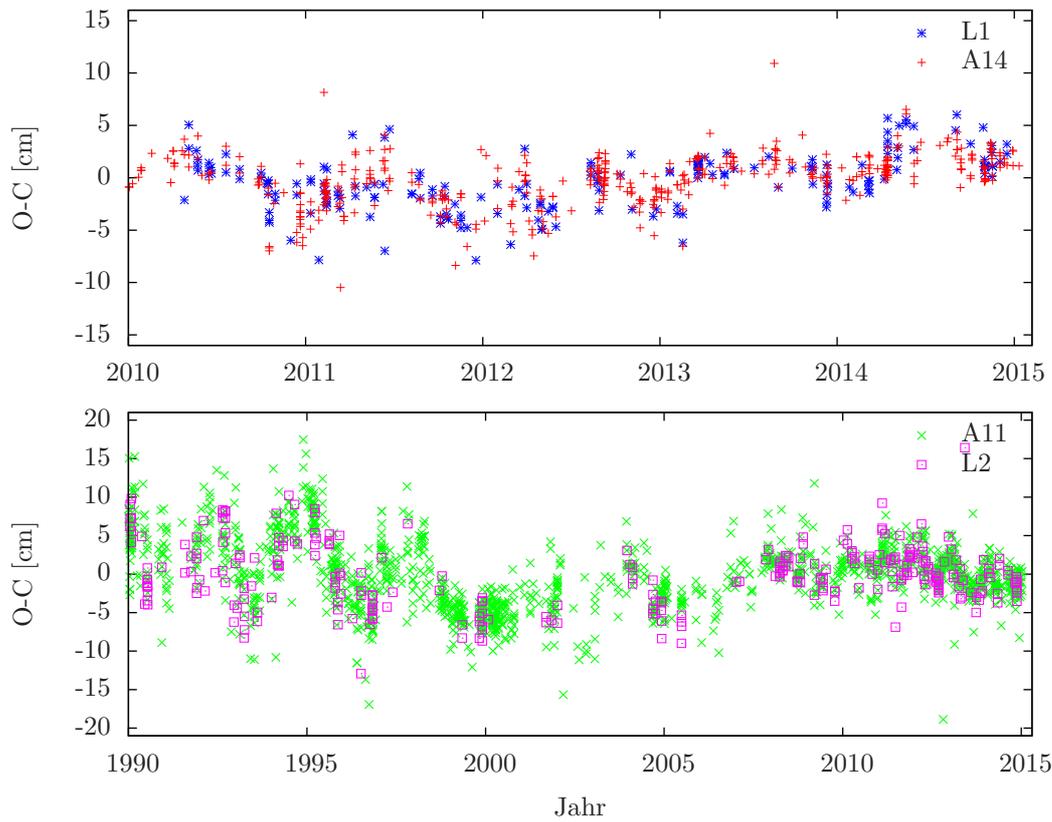


Abb. 5.3: Vergleich der 1-Weg-Residuen (observed-computed O-C) zwischen Reflektoren mit ähnlicher selenozentrischer Länge zwischen den entsprechenden Apollo- (A11, A14) und Lunochod- (L1, L2) Reflektoren.

in die Berechnung des Korrelationskoeffizienten

$$r_{12} = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x}_{Ref1} - \mathbf{x}_{Ref1,i})(\bar{x}_{Ref2} - \mathbf{x}_{Ref2,i})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\bar{x}_{Ref1} - \mathbf{x}_{Ref1,i})^2 \sum_{i=1}^n (\bar{x}_{Ref2} - \mathbf{x}_{Ref2,i})^2}} \quad (5.11)$$

ein, wobei

$$\bar{x}_{Ref} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_{Ref,i} \quad (5.12)$$

der Mittelwert aus den Monatsmitteln $\mathbf{x}_{Ref,i}$ ist. Der Kreuzkorrelationskoeffizient zwischen den Residuen von A14 und L1 beträgt 0.81 und zwischen A11 und L2 wird ein Wert von 0.69 erreicht. Die Werte bestätigen den optischen Eindruck des Diagramms. Die annähernd gleiche Bewegung der Reflektorenpaare mit ähnlicher selenozentrischer Länge zeigt, dass innerhalb der gegenwärtigen Analysegenauigkeit die Libration in Breite gut modelliert wird.

Mit der Gegenüberstellung der Residuen von Reflektoren mit ähnlicher selenozentrischer Breite, kann die Modellierung der Libration in Länge untersucht werden. In Abbildung 5.4 sind die 1-Weg-Residuen der Messungen zu L1 und L2 sowie zu A11 und A14 gegenübergestellt. Der optische Eindruck des gegenläufigen zeitlichen Verlaufs der Residuen wird durch die Kreuzkorrelationskoeffizienten von -0.41 zwischen L1 und L2 und -0.64 zwischen A11 und A14 bestätigt. Der Verlauf der Residuen zeigt, dass in der Libration in Länge, und damit der Rotationsrichtung des Mondes, weiterer Modellierungsbedarf besteht. Die Spreizung der Post-fit-Residuen zwischen den Reflektoren wurde durch die Modellierung des Mondkerns reduziert (Abbildung 5.1). Möglicherweise kann durch die Schätzung der Kernabplattung als zusätzlicher Parameter das Rotationsmodell den Messwerten weiter angepasst werden. Durch die Schätzung von zusätzlichen Librationsparametern in

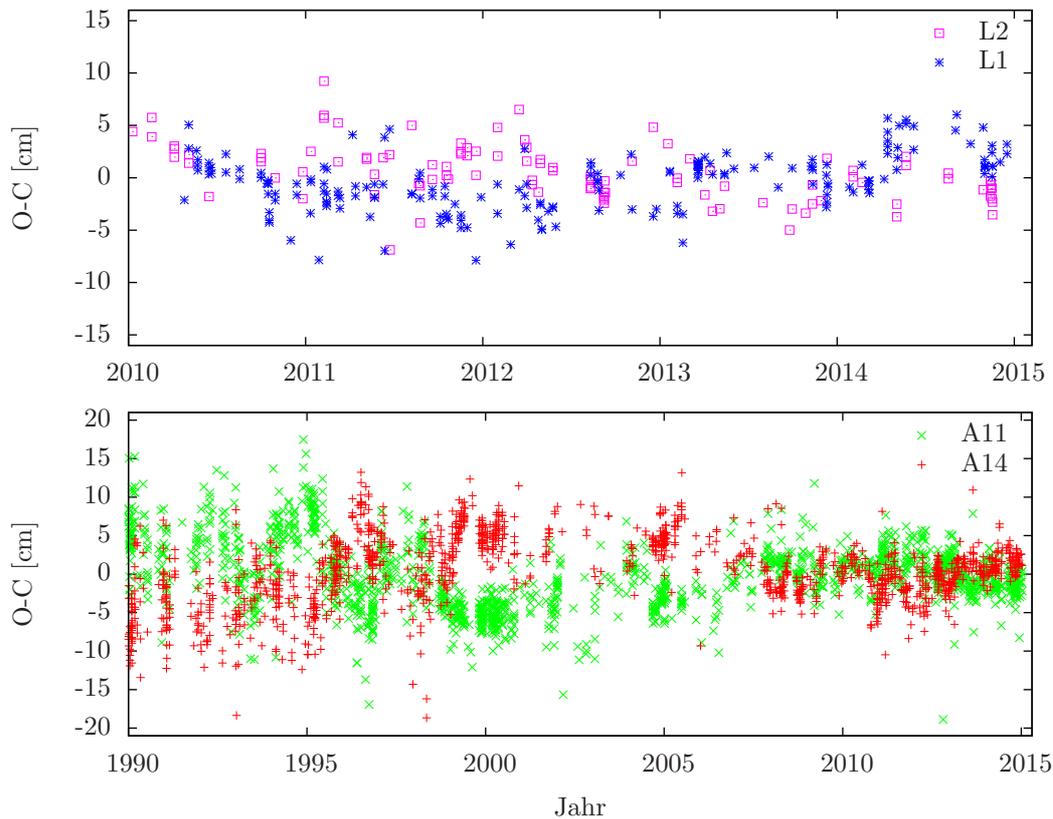


Abb. 5.4: Vergleich der 1-Weg-Residuen (observed-computed, $O-C$) zwischen Reflektoren mit ähnlicher selenozentrischer Breite zwischen den beiden Apollo- (A11, A14) und Lunochod- (L1, L2) Reflektoren.

Länge [Williams u. a., 2013], können zur Zeit unmodellerte Dissipationseffekte im Mondinneren korrigiert werden. Sie sollten zum Untersuchungsgebiet künftiger Arbeiten gehören.

Die Residuen zum A15-Reflektor zeigen eine gleichmäßige Verteilung um $O - C = 0$ (Abbildung 5.5). Bedingt durch die hohe Anzahl an Messungen zu diesem Reflektor (Tabelle 3.2) wird die Schätzung der Parameter des LLR-Modells von diesen Messungen dominiert. Das trägt zu einem großen Teil dazu bei, dass die Residuen nur geringe systematische Abweichungen von $O - C = 0$ zeigen. Der Vergleich des jährlichen wrms in Abhängigkeit von den Reflektoren am Beispiel A11, A14 und A15 in Abbildung 5.6 zeigt, dass der wrms zum A15-Reflektor vor 2006 etwa 2 cm bis 3 cm unter dem wrms der A11- und A14-Reflektoren liegt. Seit Mitte der 1990er Jahre erreichen die Residuen zu A15 einen wrms-Wert von rund 2 cm und belegen die hohe Modellierungsgenauigkeit in der radialen Komponente der Translationsbewegung des Mondes. Ab 2006 verringern sich die Residuen zu den A11- und A14-Reflektoren stärker als die Residuen zum A15-Reflektor, dessen wrms jetzt nur noch wenige Millimeter geringer ist. Hier scheinen die guten und mit dementsprechend hohem Gewicht versehenen APOLLO- und neuen OCA-Daten eine bessere Anpassung des Modells an die Messwerte zu erreichen. Die Systematiken in den A11- und A14-Residuen in Abbildung 5.4 werden reduziert, sind aber noch vorhanden.

Um mögliche periodische Effekte mit bestimmten Frequenzen in den Residuen zu untersuchen, kann zum Beispiel ein Amplitudenspektrum aus den Residuen berechnet werden [Williams u. a., 2009]. Die Residuen werden durch eine endliche Fourierreihe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n_{max}} \left[a_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T_b}\right) + b_n \sin\left(2\pi n \frac{t}{T_b}\right) \right] \quad (5.13)$$

als ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz $f_b = 1/T_b$ approximiert. Der integer-Wert n wird im Folgenden als Frequenznummer bezeichnet. Die Periodendauer der Grundfrequenz wurde zu

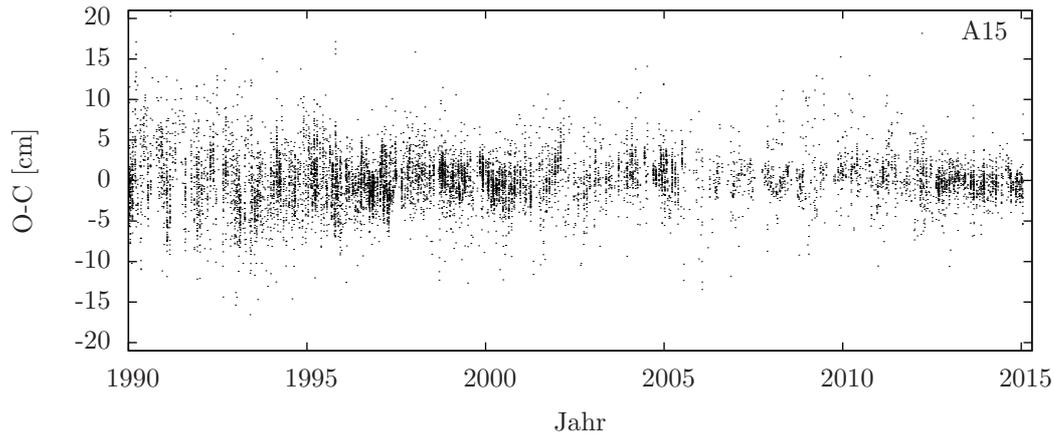


Abb. 5.5: 1-Weg-Residuen (observed-computed O-C) zum Apollo 15-Reflektor.

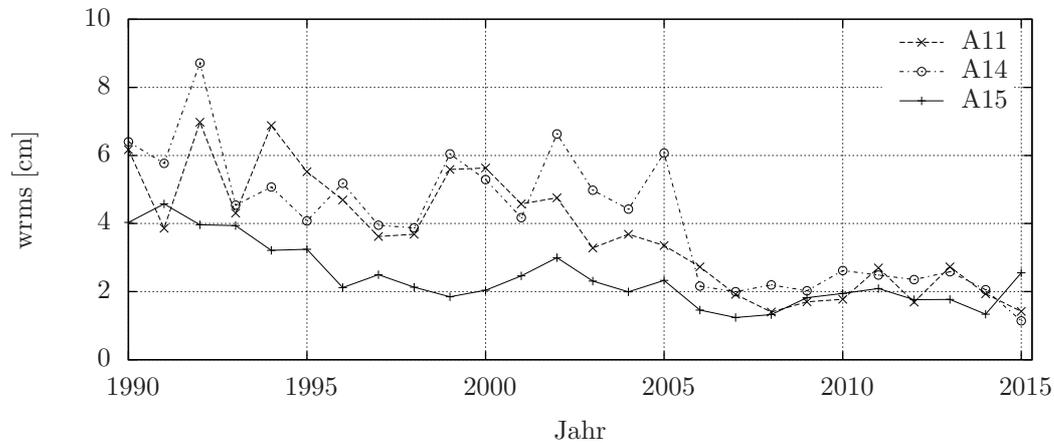


Abb. 5.6: Vergleich des jährlichen 1-Weg-wrms zu den Apollo-Reflektoren.

$T_b = 6585$ Tagen festgelegt und ist genähert ein ganzzahliges Vielfaches der mittleren synodischen und anomalistischen Bahnperiode des Mondes mit 29.531 Tagen (Delaunay Argument D) und 27.555 Tagen (Delaunay Argument l) sowie einer jährlichen Periode (Delaunay Argument l') mit einer Abweichung von rund 0.5 Tagen. Effekte in den Residuen mit synodischen, anomalistischen und jährlichen Perioden können mit dieser Grundfrequenz optimal erfasst werden. Die maximale Frequenznummer n_{max} wurde in dieser Arbeit so gewählt, dass Frequenzen bis zu einer Periodendauer von 5.5 Tagen erfasst werden. In der Auswertung ist zu beachten, dass die sehr ungleichförmige Verteilung der LLR-Daten zu Aliasing-Effekten in den Spektren führen kann. Der erste Summand in Gleichung (5.13) ist gleichbedeutend mit dem Mittelwert der Residuen und wird mit $a_0 = 0$ angenommen, da nach der Ausgleichung kein Gesamtoffset vorhanden ist. Die Parameter a_n und b_n werden mit Hilfe einer vermittelnden Ausgleichung fortlaufend, beginnend mit $n = 1$, aus den Residuen geschätzt. Der daraus resultierende Signalteil wird vor der Erhöhung der Frequenznummer n von den Residuen subtrahiert. Die zur jeweiligen Frequenznummer mit der entsprechenden Periodendauer T_b/n gehörende Amplitude A_n berechnet sich zu

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}. \quad (5.14)$$

Die Frequenznummer der synodischen Periode ist $n = 223$, der anomalistischen Periode $n = 239$ und der jährlichen Periode $n = 18$.

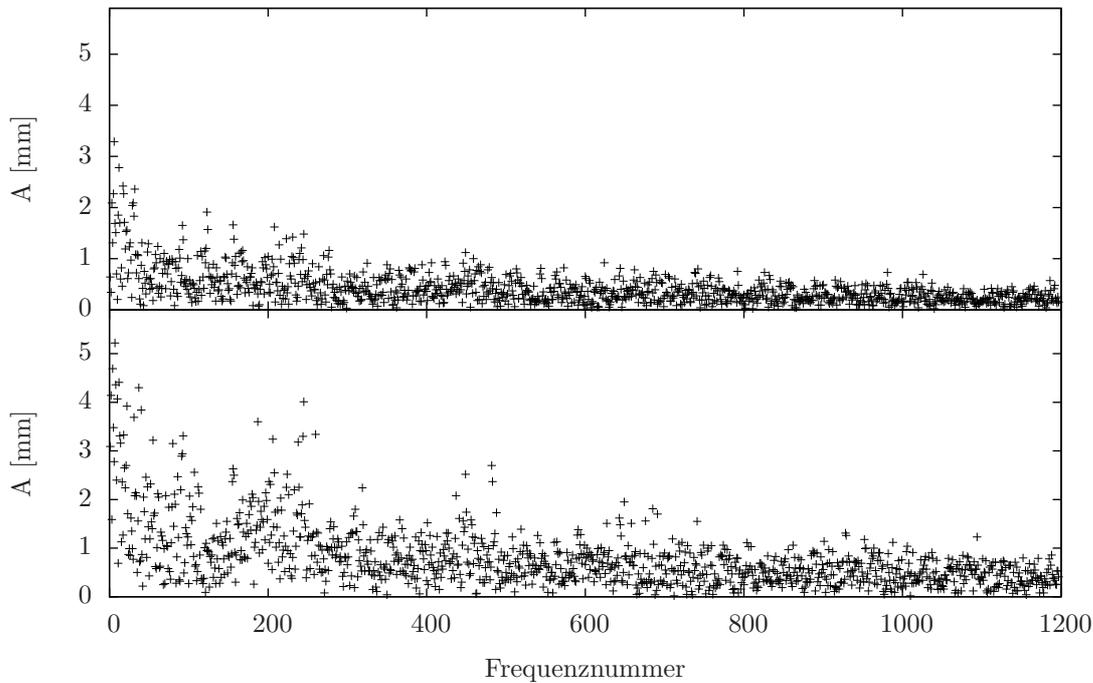


Abb. 5.7: Amplitudenspektrum der 1-Weg-post-fit-Residuen. Die obere Abbildung zeigt das Spektrum (mit der Amplitude A) der Residuen dieser Arbeit, die untere Abbildung das Spektrum der Residuen der Lösung von Biskupek [2015]. Für die Berechnung der Spektren wurden die Residuen analog zu den korrespondierenden NP gewichtet.

Abbildung 5.7 zeigt das Amplitudenspektrum der 1-Weg-post-fit-Residuen der LLR-Lösung dieser Arbeit im Vergleich zum Spektrum der Residuen der vorhergehenden Lösung von Biskupek [2015]. In der Berechnung des Spektrums wurde den Residuen das entsprechende Gewicht der korrespondierenden NP aus der Analyse der LLR-Daten zugewiesen. Damit zeigt Abbildung 5.7 das Spektrum der Residuen der NP, die einen großen Einfluss auf das Ergebnis der LLR-Analyse haben. Der Mittelwert über 1197 Amplituden verringert sich zur Lösung von Biskupek [2015] um 0.38 mm auf 0.42 mm. Zu längeren Perioden hin ist in beiden Lösungen ein allgemeiner Anstieg der Amplituden vorhanden. In dieser Arbeit wurden die bei Biskupek [2015] deutlich vorhandenen breiten Maxima in den monatlichen, halb- und drittel-monatlichen Perioden reduziert. Die synodische und anomalistische Periode zeigt mit 1.4 mm und 1.0 mm nur eine geringe Amplitude über dem Hintergrundrauschen. Die jährliche Amplitude beträgt 2.3 mm, die zum Beispiel durch unmodellerte saisonale Deformationseffekte der Erde hervorgerufen werden können [Williams u. a., 2009].

Das Amplitudenspektrum aus gleichgewichteten 1-Weg-Residuen zeigt Abbildung 5.8. Der Mittelwert liegt höher als beim gewichteten Spektrum, konnte aber ebenfalls im Vergleich zur Lösung von Biskupek [2015] deutlich reduziert werden und beträgt 1.46 mm. Auffallend sind die verbleibenden Spektrallinien um die synodische Periode (D) mit 4.6 mm und um die anomalistische Periode (l) mit bis zu 8.1 mm. Auch Perioden um $2D$ (Frequenznummer 446) und $2l$ (Frequenznummer 478) treten auf. Frequenznummer 692 (Periode 9.5159 Tage) mit einer Amplitude von 4.9 mm könnte mit der Periode von $2D - F$ mit 9.572 Tagen oder $-2D + l - 2F$ mit -9.530 Tagen übereinstimmen, F ist das Argument der Breite mit einer Periodendauer von 27.212 Tagen. Das Auftreten der Spektrallinien im Spektrum der gleichgewichteten Residuen, unterstreicht den aus Abbildung 5.4 ersichtlichen Modellierungsbedarf in der Librationsbewegung des Mondes. Durch die im Vergleich zum A15-Reflektor oft geringer gewichteten Residuen der anderen Reflektoren, ist das Spektrum in Abbildung 5.7 eher von A15 dominiert und damit sensitiver für radiale Variationen. Das Spektrum in Abbildung 5.8 erhält durch die geringere relative Gewichtung von A15 eine höhere Sensitivität für die Librationsbewegung.

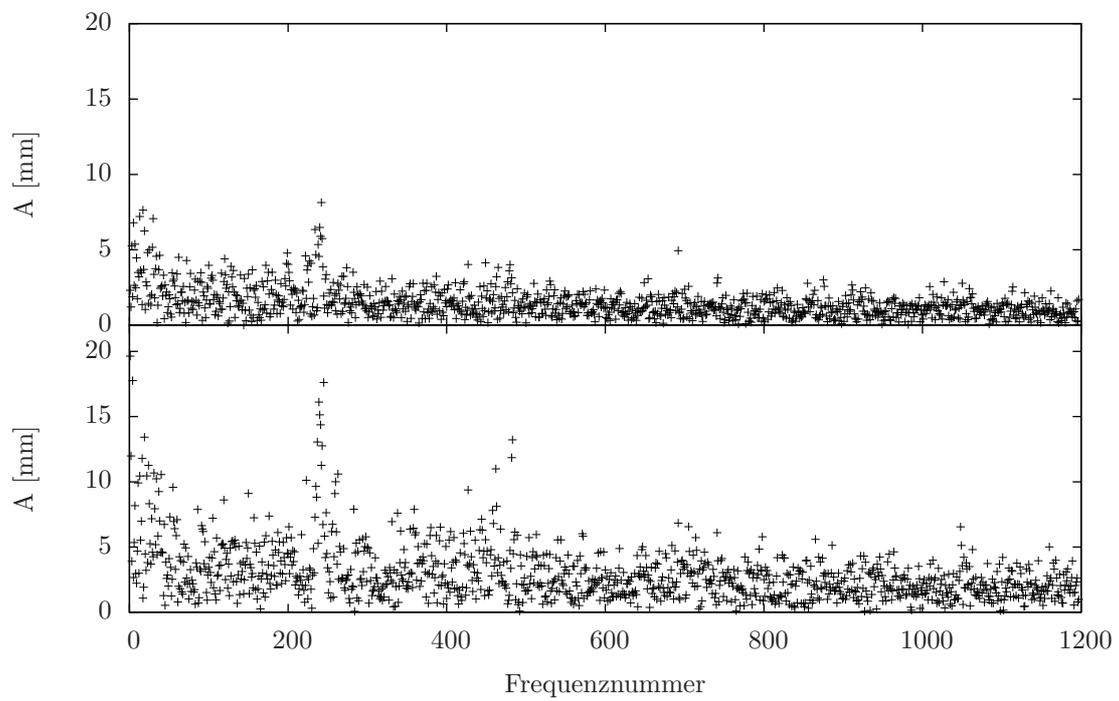


Abb. 5.8: Wie Abbildung 5.7, wobei hier die Residuen gleichgewichtet in die Berechnung der Spektren eingehen.

6 Ergebnisse relativistische Parameter

Die untersuchten Parameter in Kapitel 5 bilden zusammen mit den Startwerten der Mondtranslation (Position und Geschwindigkeit) und -rotation (Eulerwinkel und Rotationsvektor) die Standardlösung der LLR-Auswertung. Einzig die Nutationskoeffizienten bleiben in der Standardlösung auf dem MHB2000-Modell fixiert (Kapitel 5.4). Darüber hinaus können in die Auswertung einige zentrale Komponenten der Einstein'schen und Newton'schen Gravitationstheorie überprüft werden. Abweichungen der jeweiligen Parameter von der Einstein'schen Theorie finden sich zum Beispiel in einer Zusammenfassung von Will [2014]. Die untersuchten Parameter in dieser Arbeit wurden unter der Überschrift „relativistische Parameter“ zusammengefasst, auch wenn die Effekte teilweise bereits in der „klassischen“ Newton'schen Theorie vorkommen. Die Newton'sche Gravitationstheorie ist eine für viele Anwendungen ausreichende Approximation der Einstein'schen Theorie für schwache Gravitationsfelder und im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit kleine Geschwindigkeiten [Einstein, 1916].

Um die folgenden relativistischen Parameter zu bestimmen, wurde im ersten Berechnungsschritt die Standardlösung erzeugt. Dazu wurden die Programmteile der Ephemeridenrechnung und Parameterschätzung iterativ wiederholt bis die Zuschläge zu den geschätzten Parametern einen Schwellwert unterschritten und die Lösung mit dem Modell konvergiert. Im zweiten Berechnungsschritt erfolgte dann die Schätzung der jeweiligen relativistischen Parameter zusammen mit den Parametern der Standardlösung.

6.1 Zeitliche Variation der Gravitationskonstanten

Eine der grundlegenden Annahmen der Einstein'schen Theorie ist die zeitliche und räumliche Unveränderlichkeit der Gravitationskonstanten G [Einstein, 1916]. Einige alternative Gravitationstheorien lassen eine zeitliche Variationen dieser Größe zu. Als Beispiel sei die Skalar-Tensor-Theorie von Brans und Dicke [1961] als Erweiterung der Einstein'schen Theorie oder höherdimensionale Theorien, zum Beispiel die Projektive Einheitliche Feldtheorie (PUFT), genannt [Schmutzer, 2009]. Die Größenordnung der möglichen zeitlichen Variationen von G liegt im Bereich von $\dot{G}/G_0 = 10^{-11} \text{ a}^{-1}$ bis $\dot{G}/G_0 = 10^{-14} \text{ a}^{-1}$ [Sanders u. a., 2010; Steinhardt und Wesley, 2010]. Eine quadratische Abhängigkeit der Gravitationskonstanten von der Zeit \ddot{G}/G_0 wird in der Größenordnung von 10^{-20} a^{-2} vorhergesagt [Nesseris und Perivolaropoulos, 2007].

Seit Mitte des 20. Jahrhunderts wird mit Hilfe verschiedenster Ansätze nach einer möglichen zeitlichen Variation von G gesucht. Obere Grenzen für die zeitliche Variation wurden aus geophysikalischen Untersuchungen (zum Beispiel Teller [1948]; Gamow [1967]), der Beobachtung von Pulsaren (zum Beispiel Damour und Taylor [1991]; Kaspi u. a. [1994]), Modellen der Sternentwicklung (zum Beispiel Garcia-Berro u. a. [1995]; Thorsett [1996]), kosmologischen Untersuchungen (zum Beispiel Rothman und Matzner [1982]; Riazuelo und Uzan [2002]; Li u. a. [2013]) sowie aus Tests im Sonnensystem mit Radarmessungen zu Raumsonden und Planeten [Anderson u. a., 1992], Helioseismologie [Guenther u. a., 1998], LLR [Williams und Folkner, 2009; Hofmann u. a., 2010] und aus Ephemeridenrechnungen [Pitjeva und Pitjev, 2013; Fienga u. a., 2014a] abgeleitet. Eine Übersicht über die Methoden ist in Uzan [2003] sowie in Steinhardt und Wesley [2010] zu finden. Die erreichten Genauigkeiten liegen im Bereich zwischen $\dot{G}/G_0 = 10^{-11} \text{ a}^{-1}$ und $\dot{G}/G_0 = 10^{-13} \text{ a}^{-1}$. Die engsten Grenzen für einen von 0 verschiedenen Wert für \dot{G} werden aus der Analyse der Ephemeriden des Sonnensys-

tems mit $\dot{G}/G_0 = 7 \times 10^{-14} \text{ a}^{-1}$ [Pitjeva und Pitjev, 2013] und $\dot{G}/G_0 = 9 \times 10^{-14} \text{ a}^{-1}$ [Fienga u. a., 2014a] bestimmt. Die reine LLR-Lösung von Williams und Folkner [2009] gibt als obere Grenze einer Abweichung den Wert $\dot{G}/G_0 = 3 \times 10^{-13} \text{ a}^{-1}$ an. Die Größenordnung eines quadratischen Anteils wurde von Nesseris und Perivolaropoulos [2007] theoretisch zu $|\ddot{G}/G_0| < 10^{-15} \text{ a}^{-2}$ aus den Fehlerschranken für \dot{G}/G_0 abgeleitet. Eine Schätzung aus LLR-Daten von Müller und Biskupek [2007] ergab einen Wert von $\ddot{G}/G_0 = (4 \pm 5) \times 10^{-15} \text{ a}^{-2}$.

Wie in Biskupek [2015] beschrieben, kann die Gravitationskonstante in der Ephemeridenrechnung um einen linearen und quadratischen Teil in Abhängigkeit von der Zeit t erweitert werden. Zu einem beliebigen Berechnungszeitpunkt ergibt sich der Wert von $G = G(t)$ zu

$$G(t) = G_0 \left(1 + \frac{\dot{G}}{G_0} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\ddot{G}}{G_0} \Delta t^2 \right), \quad (6.1)$$

mit $\dot{G} = \ddot{G} = 0$ in der Standardlösung. Das Zeitintervall Δt ist die Differenz des aktuellen Berechnungszeitpunktes zum Startzeitpunkt der Ephemeridenrechnung. Die benötigten partiellen Ableitungen werden gemäß Gleichung (2.11) numerisch berechnet.

Der lineare und quadratische Anteil der zeitlichen Änderung wurde zum Einen jeweils einzeln mit dem Parametersatz der Standardlösung in den Gleichungen (6.2a) und (6.2b) und zum Anderen in Gleichung (6.2c) als zwei zusätzliche Parameter gemeinsam mit der Standardlösung geschätzt. Es ergeben sich die Werte von

$$\dot{G}/G_0 = (6.8 \pm 1.5) \times 10^{-13} \text{ a}^{-1}, \quad (6.2a)$$

$$\ddot{G}/G_0 = (4.1 \pm 2.5) \times 10^{-15} \text{ a}^{-2}, \quad (6.2b)$$

$$\dot{G}/G_0 = (6.6 \pm 1.6) \times 10^{-13} \text{ a}^{-1}, \quad \ddot{G}/G_0 = (0.8 \pm 2.6) \times 10^{-15} \text{ a}^{-2}. \quad (6.2c)$$

Bei den angegebenen Fehlermaßen handelt es sich um die mit dem Faktor 3 multiplizierten formalen Fehler (1σ Standardabweichung) aus der Ausgleichung. Die Werte in Gleichung (6.2) zeigen bis auf \ddot{G}/G_0 in der gemeinsamen Schätzung scheinbar eine signifikante Abweichung vom Einstein'schen Null-Ergebnis. In der gegenwärtigen Form der Schätzung sind diese Werte durch hohe Korrelationen signifikant beeinflusst. \dot{G}/G_0 ist mit den Startwerten der Mondposition und -geschwindigkeit, vor allem in der \dot{z} -Komponente, bis zu 89 %, mit den x- und y-Komponenten der Stations- und Reflektorkoordinaten bis zu 83 % und den Startwerten von ω_c bis zu 94 % korreliert. Mittlere Korrelationen bestehen mit rund 50 % zu τ_{22} , Θ_y und einigen Komponenten der Stationsgeschwindigkeitsvektoren. Für \ddot{G}/G_0 ergeben sich ebenfalls hohe Korrelationen mit den Startwerten der Mondposition und -geschwindigkeit (bis zu 76 %) und der z-Komponente von ω_c (77 %). Mittlere Korrelationen ergeben sich mit 61 % und 39 % zu τ_{21} und τ_{22} und mit rund 50 % zu den x- und y-Komponenten der Reflektorkoordinaten. Werden beide Parameter zusammen in einer Auswertung geschätzt, Gleichung (6.2c), verringern sich die Korrelationen von \dot{G}/G_0 mit den Startwerten der Mondposition und -geschwindigkeit sowie zwischen \ddot{G}/G_0 und den Reflektorkoordinaten etwa um den Faktor 4. Untereinander sind \dot{G}/G_0 und \ddot{G}/G_0 nur schwach mit 30 % korreliert und können als annähernd unabhängige Parameter gemeinsam bestimmt werden. Die mit \dot{G}/G_0 und \ddot{G}/G_0 korrelierten Größen erhalten ebenfalls signifikante Zuschläge im Bereich von bis zu 10σ . Ein unabhängiger Vergleich der geschätzten Parameter ist nur teilweise, zum Beispiel anhand der Stationskoordinaten mit der Referenzlösung aus dem ITRF, möglich. Die geschätzten Stationskoordinaten erhalten Zuschläge in der Größenordnung von bis zu 2.5 cm und die mittleren Differenzen zu den Referenzwerten der ITRF-Lösung vergrößern sich. Dieser Effekt ist nicht plausibel und ein Hinweis darauf, dass die signifikanten Zuschläge zu den Stationskoordinaten in dieser Lösung nicht realistisch sind. Aufgrund der hohen Korrelationen zu \dot{G}/G_0 und \ddot{G}/G_0 und den anderen oben genannten Parametern

kann daraus gefolgert werden, dass die signifikanten Zuschläge zu diesen Größen ebenfalls nicht realistisch sind. Daher wird die Schätzstrategie verändert.

Der Kernrotationsvektor ω_c ist relativ unsicher bestimmt. Im Vergleich zum Rotationsvektor des Mantels ist die Genauigkeit in der dominierenden z-Komponente von ω_c etwa um den Faktor 10^6 schlechter (Tabelle A.7). Aus diesem Grund wird in einer zweiten Schätzung der Rotationsvektor ω_c auf dem Wert der Standardlösung festgehalten. Die Zuschläge zu den Stationskoordinaten erreichen je nach Station und Koordinatenkomponente signifikant hohe Werte von teilweise über 2 cm. Im Gegensatz zum Kernrotationsvektor wurden die Stationskoordinaten in der zweiten Ausgleichung aber nicht festgehalten, sondern mit Constraints von 2 mm in jeder Koordinatenrichtung versehen. Der lineare und quadratische Term der Variation der Gravitationskonstante ergibt sich in der zweiten Lösung zu

$$\dot{G}/G_0 = (7.1 \pm 7.6) \times 10^{-14} \text{ a}^{-1} , \quad (6.3a)$$

$$\ddot{G}/G_0 = (1.6 \pm 2.0) \times 10^{-15} \text{ a}^{-2} , \quad (6.3b)$$

$$\dot{G}/G_0 = (0.8 \pm 1.1) \times 10^{-13} \text{ a}^{-1} , \quad \ddot{G}/G_0 = (-0.3 \pm 2.4) \times 10^{-15} \text{ a}^{-2} . \quad (6.3c)$$

Die Schätzung der beiden Parameter (einzeln oder kombiniert) ist analog zu Gleichung (6.2). Durch die Fixierung von ω_c und das Einführen der Constraints verringern sich die formalen Fehler für \dot{G}/G_0 und \ddot{G}/G_0 . Bei den angegebenen realistischen Genauigkeitsmaßen handelt es sich um den 4-fachen Wert des formalen Fehlers aus der Ausgleichung und soll im Folgenden kurz begründet werden. Die in der Ausgleichung bestimmten Fehlermaße in den Gleichungen (6.3) wurden unter der Annahme von voneinander unabhängigen NP als Beobachtungen erhalten. Bei der Messung von mehreren NP in kurzer Zeit ändern sich die Messbedingungen nur geringfügig, sodass durchaus Korrelationen zwischen den NP auftreten können. Die Berücksichtigung von Korrelationen zwischen den Beobachtungen führt zu einer Verringerung der formalen Genauigkeit für die geschätzten Parameter. Zum Beispiel könnte ein Teil des Unterschiedes zwischen der formalen inneren Genauigkeit der geschätzten Stationskoordinaten und der Differenz zu Referenzwerten im ITRF, als Maß für die äußere Genauigkeit (Tabelle 5.4), auf die fehlenden Korrelationen im stochastischen Modell zurückzuführen sein. Dies gilt gleichermaßen für alle weiteren geschätzten Parameter in dieser Arbeit und sollte in künftigen Studien untersucht werden. Auf Grund der möglichen Korrelationen zwischen den Beobachtungen und den teilweise sehr hohen Korrelationen zwischen den geschätzten Parametern wurde die Angabe eines realistischen Fehlers gewählt, der dem 4-fachen des formalen Fehlers aus der Ausgleichung entspricht. Mit dieser erhöhten Fehlergrenze sollen ebenfalls verbleibende systematische Fehler im Modell berücksichtigt werden, zum Beispiel in der Librationsbewegung (Kapitel 5.8).

Die Korrelationen haben sich in dieser Schätzung deutlich verringert. Für \dot{G}/G_0 werden nur noch mittlere Korrelationen von 54 % zur z-Komponente der Mondgeschwindigkeit, 25 % zu Θ_y , 40 % zur y-Komponente der OCA-Station und 35 % zu τ_{22} erreicht. Korrelationen zu anderen Parametern sind mit weniger als 20 % sehr gering. Für \ddot{G}/G_0 verringern sich die Korrelationen ebenfalls auf 52 % mit τ_{21} , 19 % mit τ_{22} und rund 55 % zu den x-y-Komponenten der Startwerte für die Mondposition und -geschwindigkeit. Alle anderen Korrelationen liegen unter 15 %. Werden beide Parameter geschätzt, treten höhere Korrelationen von rund 60 % mit $\tau_{21/22}$ und bis zu 70 % mit der Mondposition und -geschwindigkeit auf. Untereinander sind \dot{G}/G_0 und \ddot{G}/G_0 in der zweiten Schätzung mit 78 % höher korreliert als in der ersten Schätzung.

Im Vergleich zur Lösung von [Biskupek \[2015\]](#) wurden in dieser Arbeit die Nutationskoeffizienten der 18.6-Jahres Periode nicht mitgeschätzt. Eine gleichzeitige Bestimmung der Koeffizienten ändert die vorliegenden Ergebnisse für \dot{G}/G_0 und \ddot{G}/G_0 nicht. Die Ursache kann zum Einen in der leicht geänderten Auswertekonfiguration liegen, zum Beispiel in der jetzt nicht mitgeschätzten Position und Geschwindigkeit des Erde-Mond-Baryzentrums zum Beginn der Ephemeridenrechnung, zum

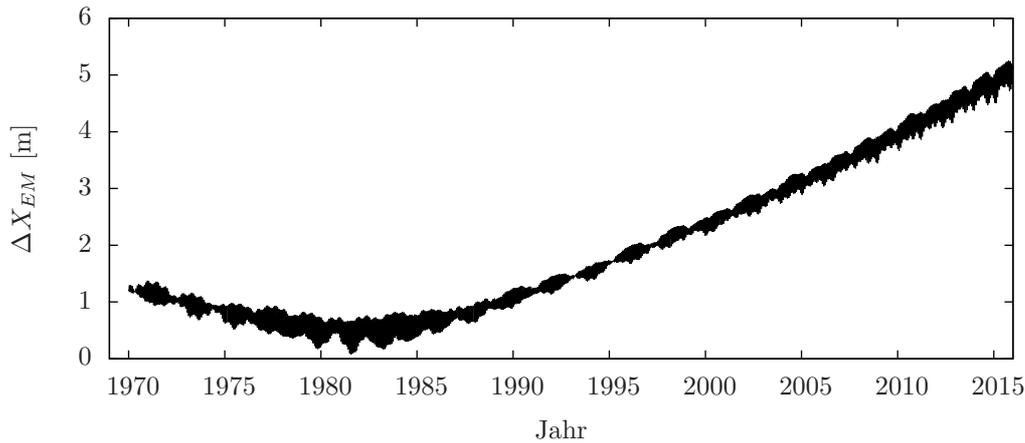


Abb. 6.1: Differenz des Erde-Mond-Abstandes ΔX_{EM} zwischen einer mit $\dot{G}/G_0 = 1.0 \times 10^{-12} \text{ a}^{-1}$ gestörten und ungestörten Bahn.

Anderen in den implementierten Modellverbesserungen. Die in dieser Arbeit neu implementierte Modellierung der Gezeitenbeschleunigung des Mondes über die beiden mitgeschätzten Parameter $\tau_{21/22}$ führt zu einer Dekorrelation mit den geschätzten Werten für \dot{G}/G_0 und \ddot{G}/G_0 verglichen mit der Korrelation von fast 100% mit dem einzelnen Gezeitenparameter der Erde $k_2\delta$ in der alten Programmversion.

Zur Analyse der Auswirkungen einer zeitlich veränderlichen Gravitationskonstante auf die Residuen der LLR-Analyse, wurde in der Ephemeridenrechnung ein fester Wert von $\dot{G}/G_0 = 1.0 \times 10^{-12} \text{ a}^{-1}$ eingeführt und das Modell bestmöglich darauf angepasst. Die Parameterschätzung wurde ohne Constraints an den Stationskoordinaten und ohne Fixierung des Kernrotationsvektors durchgeführt. Abbildung 6.1 zeigt die Entwicklung der Differenz des Erde-Mond-Abstandes ΔX_{EM} im betrachteten Zeitraum. In der konvergierten Lösung zeigt sich eine Drift im Erde-Mond-Abstand, die bei einem um eine Größenordnung kleineren Wert für \dot{G}/G_0 nicht auftritt [Biskupek, 2015]. Der gewählte, im Vergleich zu geschätzten Genauigkeit, relativ große Wert für \dot{G}/G_0 beeinflusst über die Anpassung aller anderen Parameter auch die Orientierung des Mondes, die die Änderungen im radialen Abstand zum großen Teil ausgleicht. Dies zeigt aber auch, dass die alleinige Betrachtung des Erde-Mond-Abstandes nicht ausreichend ist, um die Sensitivität der LLR-Analyse auf den entsprechenden Parameter vollständig zu erfassen. Der Vergleich der berechneten Residuen gibt einen realistischeren Einblick in die Detektierbarkeit der zeitlichen Veränderung von G , da in diesem Fall auch die ungleichmäßige Datenverteilung in die Auswertung eingeht.

Die Änderungen in ΔX_{EM} können für eine Abschätzung der zu erwartenden Frequenzen bei einem von 0 verschiedenen Wert für \dot{G} herangezogen werden. Das Leistungsdichtespektrum (PSD) der Differenzen aus Abbildung 6.1 ist in Abbildung 6.2 dargestellt und zeigt ausgeprägte Effekte mit den Perioden von 13.61 Tagen ($2 \cdot$ Argument der Breite, $2F$), 14.77 Tagen ($2 \cdot$ synodisch, $2D$), 27.56 Tagen (anomalistisch, l) und 31.81 Tagen ($2 \cdot$ synodisch-anomalistisch, $2D - l$). Die Angaben in Klammern beziehen sich auf Vielfache der entsprechenden Frequenzen.

Der wrms der Residuen der konvergierten, mit $\dot{G}/G_0 = 1.0 \times 10^{-12} \text{ a}^{-1}$ gestörten, Lösung ist 0.15 mm größer als der wrms der Residuen der Standardlösung und der Wert der Verbesserungsquadratsumme nimmt um 0.6% zu. Analog zu Kapitel 5.8 wurde aus den Residuen ein Amplitudenspektrum und die Differenz zum Spektrum der Standardlösung ($\text{Spektrum}_{\dot{G}/G} - \text{Spektrum}_{\text{Standard}}$) berechnet. Abbildung 6.3 zeigt die Differenz der gewichteten Residuenspektren. Positive Werte bedeuten, dass die Amplitude der dargestellten Frequenznummer in der Lösung mit \dot{G}/G_0 größer ist als in der Standardlösung. Über alle dargestellten Frequenzen beträgt die Standardabweichung der Differenzen 0.08 mm und enthält zum größten Teil nur das Rauschen der Amplituden zwischen

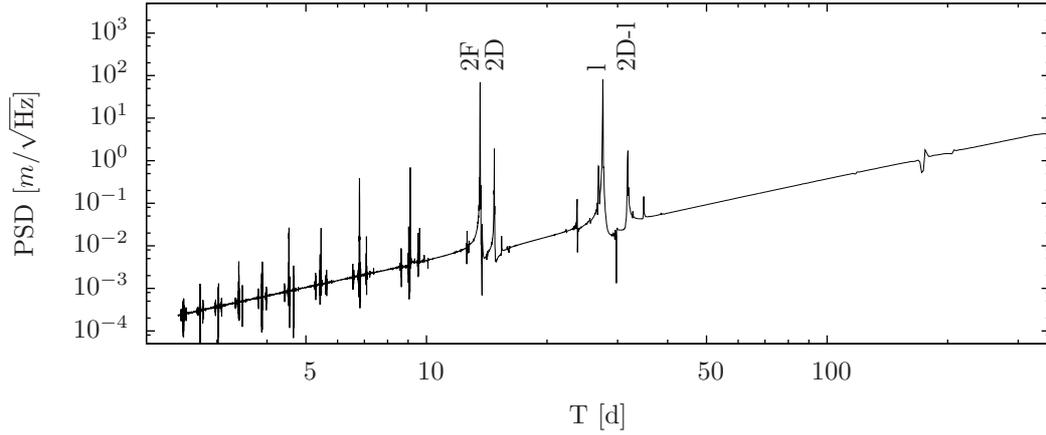


Abb. 6.2: Leistungsdichtespektrum der Differenzen aus Abbildung 6.1.

den beiden Lösungen. Das bedeutet, dass in einem großen Frequenzanteil die Residuen zwischen den Lösungen nahezu identisch sind. Abweichungen zum Spektrum der Standardlösung treten mit Perioden von 34.85 Tagen (um $2D - l - l'$, mit mittlerer Anomalie der Sonne l'), 26.88 Tagen (um $2F - l$), 14.77 Tagen (um $2D$) und 9.84 Tagen ($2F + 2D - l$) mit den Frequenznummern 189, 245, 446 und 691 auf. Im Vergleich zum Rauschniveau von 0.08 mm des Differenzspektrums nehmen die vier beschriebenen Frequenzbereiche maximale Amplituden in der Größenordnung des 6-fachen, 7-fachen, 5-fachen und 3-fachen Rauschniveaus ein. Die aus dem Leistungsdichtespektrum der ΔX_{EM} -Variationen in Abbildung 6.2 ermittelten Perioden werden in der Analyse der Residuen nicht exakt reproduziert, da im Auswertemodell zusätzlich der Effekt der Rotation eingeht. Die sehr inhomogene Verteilung der NP führt zusätzlich zu den breiteren Spektrallinien, bei denen teilweise auch Nachbarfrequenzen mit beeinflusst sind (Leakage-Effekt). Die negativen Werte um die Frequenznummer 245 zeigt eine Verringerung der Amplitude im Spektrum der mit \dot{G}/G_0 gestörten Lösung an. Dieser Teilfrequenzbereich wird durch die Effekte in den anderen Frequenzbereichen jedoch kompensiert. Das zeigt sich zum Beispiel in der Summe der Amplitudendifferenzen, die mit 2.3 mm im positiven Bereich liegt.

Deutlicher sind die Effekte in der Differenz der ungewichteten Residuenspektren ausgeprägt (Abbildung 6.4). Abweichungen zum Spektrum der Standardlösung treten mit rund dem 8-fachen bei den Perioden mit $2D - l$ (Frequenznummer 207), D (239), $2F - l$ (245) und als ein breiteres Band mit maximal dem 4-fachen des Hintergrundrauschniveaus bei $2D$ (446) auf. Der synodische Teil ist negativ, wird aber durch die anderen Frequenzen kompensiert, die Summe der Amplitudendifferenzen beträgt in diesem Fall 16.43 mm.

Die Differenzen der Residuen-Amplitudenspektren zeigen, bei einem um den 10-fachen des realistischen Fehlers veränderten Werts von \dot{G}/G_0 , Änderungen von einzelnen Spektrallinien im Bereich des 4- bis 8-fachen des Differenzrauschniveaus. Weiterhin zeigt das Rauschniveau der Differenzen einen um den Faktor 4.5 (gewichtet) beziehungsweise 6.8 (ungewichtet) geringeren Wert, als die Standardabweichungen über alle Amplituden innerhalb der Amplitudenspektren (Abbildungen 5.7 und 5.8). Die deutlich hervortretenden veränderten Frequenzen in den Differenzen können daher im reinen Residuenspektrum nicht oder nur sehr unsicher detektiert werden. Trotzdem zeigt die Detektion von einzelnen Spektrallinien mit dem 8-fachen Wert des Hintergrundrauschens in den Differenzen im Vergleich zur 10-fachen Änderung für \dot{G}/G_0 , dass der angenommene realistische Fehler von rund $1 \times 10^{-13} \text{ a}^{-1}$ plausibel ist. Im Rahmen dieser Genauigkeit wird keine Abweichung von der Einstein'schen Theorie detektiert.

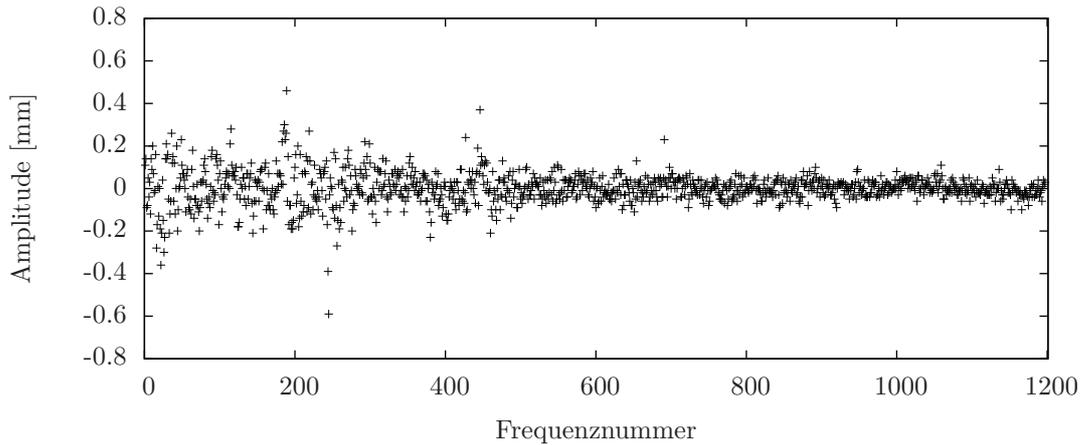


Abb. 6.3: Differenz der gewichteten 1-Weg-Residuen-Amplitudenspektren zwischen der mit $\dot{G}/G_0 = 1 \times 10^{-12} \text{ a}^{-1}$ gestörten Lösung und der Standardlösung.

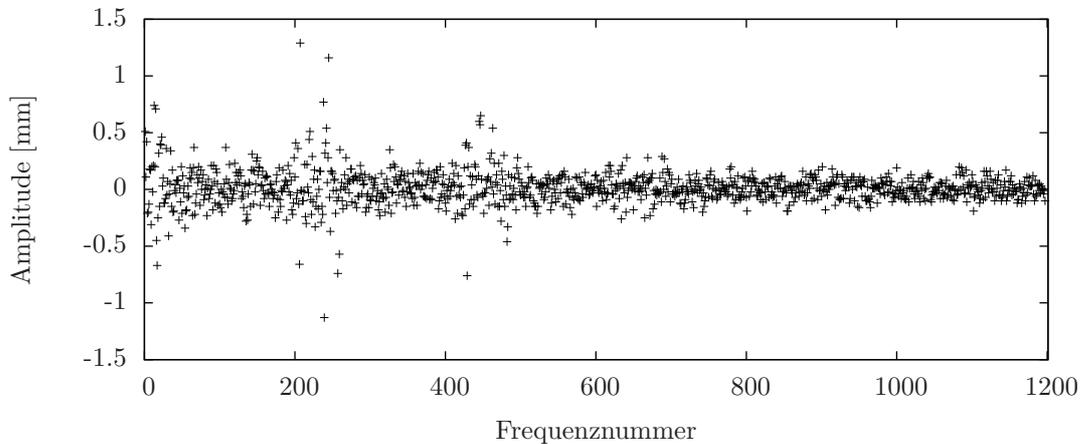


Abb. 6.4: Differenz der ungewichteten 1-Weg-Residuen-Amplitudenspektren zwischen der mit $\dot{G}/G_0 = 1 \times 10^{-12} \text{ a}^{-1}$ gestörten Lösung und der Standardlösung.

6.2 Äquivalenzprinzip

6.2.1 Test bezüglich der Richtung zur Sonne

Das Äquivalenzprinzip geht zurück auf die Zeit von Galileo Galilei, der durch Experimente feststellte, dass frei fallende Körper im gleichen Gravitationsfeld unabhängig von ihrer Masse, Form und Zusammensetzung gleich beschleunigt werden [Roll u. a., 1964]. Isaac Newton führte in seinem zweiten Axiom die träge (inertiale) Masse m_i ein und es gilt in der Newton'schen Mechanik die Beziehung $\mathbf{F} = m_i \mathbf{a}$ zwischen der Kraft \mathbf{F} und der Beschleunigung \mathbf{a} . Theoretisch kann m_i von der schweren (gravitativen) Masse m_g , die ein Maß für die gravitative Anziehung zwischen verschiedenen Körpern in Newtons Gravitationsgesetz mit $\mathbf{F} = m_g \mathbf{g}$ darstellt, abweichen. Falls das Verhältnis m_g/m_i für zwei Körper (1 und 2) verschieden und das schwache Äquivalenzprinzip (weak equivalence principle, WEP) $m_g = m_i$ verletzt ist, würden beide Körper eine unterschiedliche Beschleunigung $\mathbf{a}_{1,2} = (m_g/m_i)_{1,2} \mathbf{g}$ im gleichen Gravitationsfeld erfahren. In Laborexperimenten auf der Erde kann das WEP mit Hilfe von empfindlichen Torsionswaagen und Testkörpern aus verschiedenen chemischen Elementen, zum Beispiel Beryllium, Aluminium und Titan, untersucht werden [Adelberger u. a., 1990]. Der Vergleich der entsprechenden Frei-Fall-Beschleunigungen der

Testkörper a_1 und a_2 führt über

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{2(a_1 - a_2)}{a_1 + a_2} = \left(\frac{m_g}{m_i}\right)_1 - \left(\frac{m_g}{m_i}\right)_2 = \Delta \frac{m_g}{m_i} \quad (6.4)$$

zum Test des Äquivalenzprinzips. Die Untersuchungen von [Wagner u. a. \[2012\]](#) bestätigen das WEP zwischen Titan und Beryllium mit $(0.3 \pm 1.3) \times 10^{-13}$ für eine differentielle Beschleunigung in Richtung Geozentrum und $(-3.1 \pm 4.7) \times 10^{-13}$ für eine differentielle Beschleunigung in Richtung Sonne. Künftige Satellitenmissionen wie STEP [[Pereira u. a., 2016](#)], der im April 2016 gestartete MICROSCOPE [[Bergé u. a., 2015](#)] oder GG [[Nobili u. a., 2012](#); [Nobili, 2016](#)] sollen die bisher erreichten Genauigkeiten um mehrere Größenordnungen bis auf 10^{-18} steigern.

Die Gültigkeit des Äquivalenzprinzips ist ebenfalls ein Eckpfeiler der Einstein'schen Gravitationstheorie. Hier wird das schwache Äquivalenzprinzip um die gravitative Selbstenergie U der Körper zum starken Äquivalenzprinzip (strong equivalence principle, SEP) erweitert. In der Einstein'schen Theorie erzeugt jede Form von Energie eine gravitative Wirkung. Auch die Energie des körpereigenen Gravitationsfeldes erzeugt Gravitation. Für Testkörper im Labor ist die gravitative Selbstenergie vernachlässigbar klein. Betrachtet man jedoch astronomische Körper mit größerer Selbstenergie, kann auch das starke Äquivalenzprinzip getestet werden [[Nordtvedt, 1968a](#)]. Das Verhältnis m_g/m_i für einen Körper der Masse M kann mit Hilfe des Nordtvedt-Parameters η parametrisiert werden

$$\frac{m_g}{m_i} = 1 + \eta \frac{U}{Mc^2} . \quad (6.5)$$

In der Einstein'schen Theorie gilt $\eta = 0$, während einige alternative Gravitationstheorien eine Verletzung des SEP voraussagen, zum Beispiel in [Damour und Polyakov \[1994\]](#).

Der Test des Äquivalenzprinzips mit dem Erde-Mond-System bedeutet, dass Erde und Mond die Rolle von Testkörpern im Gravitationsfeld der Sonne einnehmen. Aufgrund der unterschiedlichen Zusammensetzung und der gravitativen Selbstenergie von Erde und Mond wird eine Kombination von WEP und SEP getestet. Eine Verletzung des Äquivalenzprinzips würde zu einer zusätzlichen Beschleunigung des Mondes in Richtung zur Sonne führen, die von der Differenz der Verhältnisse m_g/m_i abhängt

$$\Delta \left(\frac{m_g}{m_i}\right)_{EM} = \left(\frac{m_g}{m_i}\right)_{Erde} - \left(\frac{m_g}{m_i}\right)_{Mond} . \quad (6.6)$$

In dieser Arbeit wurde das Äquivalenzprinzip bezüglich der Sonne auf zwei verschiedenen Arten getestet:

1. Schätzung des Nordtvedt-Parameters η : Die zusätzliche Beschleunigung des Mondes bei einer Verletzung des SEP führt zu einer Abstandsszillation ΔX_{EM} in Abhängigkeit vom synodischen Winkel D und einem Skalierungsfaktor S in der Größenordnung von $S = -2.943 \times 10^{10}$ m [[Nordtvedt, 1968b](#); [Nordtvedt und Vokrouhlicky, 1997](#)] mit

$$\Delta X_{EM} = S \Delta \frac{m_g}{m_i} \cos D . \quad (6.7)$$

Mit der Differenz der gravitativen Selbstenergie zwischen Erde und Mond [[Williams u. a., 1996b](#)]

$$\left(\frac{U}{Mc^2}\right)_{Erde} - \left(\frac{U}{Mc^2}\right)_{Mond} = -4.45 \times 10^{-10} \quad (6.8)$$

und Gleichung (6.5) folgt

$$\Delta X_{EM} = 13.1 \text{ m } \eta \cos D . \quad (6.9)$$

Die benötigten Ableitungen in der Parameterschätzung werden analytisch mit Gleichung (6.9) berechnet.

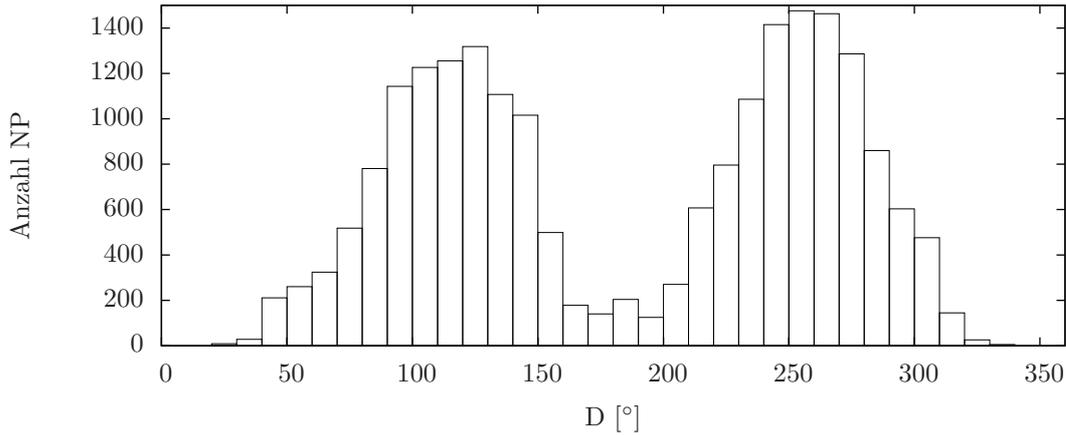


Abb. 6.5: Histogramm der NP über den synodischen Winkel D .

2. Schätzung des Verhältnisses $\Delta(m_g/m_i)_{EM}$: Die Schätzung von $\Delta(m_g/m_i)_{EM}$ wurde im Rahmen dieser Arbeit in die Analysesoftware implementiert. Die entsprechende partielle Ableitung wird numerisch berechnet, indem eine zusätzliche Relativbeschleunigung $\ddot{\mathbf{x}}_{mgmi}$ des Mondes

$$\ddot{\mathbf{x}}_{mgmi} = \Delta \left(\frac{m_g}{m_i} \right)_{EM} GM_{Sonne} \frac{\mathbf{x}_{SM}}{X_{SM}^3} \quad (6.10)$$

in Richtung der Sonne \mathbf{x}_{SM} implementiert wurde. Aufgrund der zusätzlichen Beschleunigung in den Bewegungsgleichungen wird in diesem Ansatz die Interaktion mit allen anderen Kräften in der Ephemeridenrechnung beibehalten. Aus diesem Grund wird dieser Ansatz gegenüber der ersten Variante bevorzugt, auch wenn die Ergebnisse ähnlich sind.

Die Verteilung der NP über den synodischen Winkel D ist in Abbildung 6.5 dargestellt. In den bisherigen Daten, die hauptsächlich mit Laserlicht im grünen Spektralbereich gemessen wurden, ist deutlich eine Neu- und Vollmondücke zu erkennen. Die Nähe des Neumondes zur Sonne verhinderte bisher Beobachtungen während dieser Mondphase aufgrund eines höheren Hintergrundrauschens des hellen Himmels oder aufgrund von Sicherheitsbestimmungen des Teleskops [Battat, persönliche Kommunikation, 2016]. Die wenigen Beobachtungen um Vollmond entstanden teilweise zu Mondfinsternissen, da sonst auch hier ein höheres Hintergrundrauschen und zusätzlich ein, vermutlich durch Staub hervorgerufener, verringerter Reflexionsgrad der Reflektoren bei steiler Sonneneinstrahlung vorliegt [Murphy u. a., 2010]. Die meisten Beobachtungen liegen in den Bereichen um die Halbmondphasen, in denen der $\cos D$ -Term einer möglichen Verletzung des Äquivalenzprinzips nahe 0 ist. Die ungleichmäßige Verteilung der Beobachtungen schwächt den gegenwärtigen Test mit LLR. Aktuelle Entwicklungen in der LLR-Messung mit infraroten Lasern erlauben neben Messungen in der Nacht auch Messungen am Tageshimmel und erreichen ein besseres Signal-zu-Rausch-Verhältnis als im grünen Spektralbereich [Courde, 2016]. Damit können die Lücken zur Neu- und Vollmondzeit künftig geschlossen werden und zu einer weiteren Genauigkeitssteigerung im Test des Äquivalenzprinzips führen.

Die Schätzung des Verhältnisses zwischen schwerer und träger Masse ergibt

$$\Delta \left(\frac{m_g}{m_i} \right)_{EM} = (-3.0 \pm 5.0) \times 10^{-14} . \quad (6.11)$$

Das Ergebnis zeigt eine hohe Korrelation mit GM_{E+M} von 60 %. Die Ursache liegt in der beiderseitigen Abhängigkeit vom synodischen Winkel D [Müller und Nordtvedt, 1998; Nordtvedt, 1998]. Da hauptsächlich die radiale Komponente zwischen Erde und Mond bei einer Verletzung des Äquivalenzprinzips beeinflusst ist, treten ebenfalls Korrelationen von 60 % zu den x-Komponenten der

Reflektorkoordinaten auf. Im Gegensatz zur Lösung in Müller u. a. [2012] werden die jährlichen Nutationskoeffizienten in dieser Arbeit nicht mitgeschätzt, da mit der erweiterten Modellierung mögliche Inkonsistenzen mit einer jährlichen Periode reduziert werden konnten (Kapitel 5.4). Der angegebene realistische Fehler ist der mit dem Faktor 3 multiplizierte formale Fehler aus der Ausgleichung. Die entsprechende Amplitude der radialen Variation des Mondorbits beträgt mit Gleichung (6.7)

$$\Delta X_{EM,mgmi} = (0.9 \pm 1.4) \text{ mm} , \quad (6.12)$$

unter der Annahme, dass das WEP gültig ist und eine mögliche Verletzung das SEP betrifft. Die direkte Schätzung des Nordvedt Parameters ergibt

$$\eta = (-0.2 \pm 1.1) \times 10^{-4} , \quad (6.13)$$

das entspricht einer maximalen radialen Oszillation mit der Amplitude von

$$\Delta X_{EM,\eta} = (-0.3 \pm 1.5) \text{ mm} . \quad (6.14)$$

Die angegebenen Unsicherheiten sind ebenfalls 3-fache formale Fehler nach der Ausgleichung und die Korrelationen analog zum Ergebnis von $\Delta(m_g/m_i)_{EM}$. Die indirekte Bestimmung von η über die Gleichungen (6.7) und (6.9) und der Annahme, dass das WEP gültig ist, ergibt

$$\eta_{indir} = (0.7 \pm 1.1) \times 10^{-4} , \quad (6.15)$$

in Übereinstimmung mit dem direkten Ergebnis in Gleichung (6.13).

In Laborexperimenten wurde von Adelberger [2001] ein Test des WEP mit zwei speziellen Testkörpern mit der Zusammensetzung der Erde und des Mondes durchgeführt. Die Kombination von zufälligen und systematischen Fehlern des Ergebnisses führt zu einem reinen WEP-Test des „Erde-Mond-Systems“ im Labor mit

$$\Delta \left(\frac{m_g}{m_i} \right)_{EM_{WEP}} = (1.0 \pm 1.4) \times 10^{-13} . \quad (6.16)$$

Für einen SEP-Test aus LLR-Daten ergibt sich damit

$$\Delta \left(\frac{m_g}{m_i} \right)_{EM_{SEP}} = (-1.3 \pm 1.5) \times 10^{-13} \quad (6.17)$$

und

$$\eta_{SEP} = (2.9 \pm 3.4) \times 10^{-4} . \quad (6.18)$$

Die Unsicherheit des WEP-Labortests ist um den Faktor 2 größer, als das aus LLR bestimmte Ergebnis in Gleichung (6.11) und dominiert damit die erreichte Genauigkeit des reinen SEP-Tests aus LLR-Daten. Mit einem zukünftigen genaueren Labortest des WEP oder den Ergebnissen der MICROSCOPE-Mission kann auch die Obergrenze einer reinen SEP-Verletzung mit LLR genauer bestimmt werden.

Die Auswirkung einer Verletzung des Äquivalenzprinzips auf die Residuen der LLR-Analyse wurde durch die Einführung eines festen Wertes von $\Delta(m_g/m_i)_{EM} = 5 \times 10^{-13}$ in die Ephemeridenrechnung und die anschließende bestmögliche Anpassung des restlichen Modells untersucht. Abbildung 6.6 zeigt die Differenz der geozentrischen Mondephemeride in radialer Richtung ΔX_{EM} . Der Offset von rund 92 cm wird hauptsächlich durch einen veränderten Wert für GM_{E+M} verursacht. Die zu erwartenden Frequenzen in den Residuen bei einer Verletzung des Äquivalenzprinzips können aus dem Leistungsdichtespektrum der Differenzen in Abbildung 6.6 bestimmt werden. Abbildung 6.7 zeigt das Spektrum und die deutlichen, mit der Periodendauer von D verbundenen

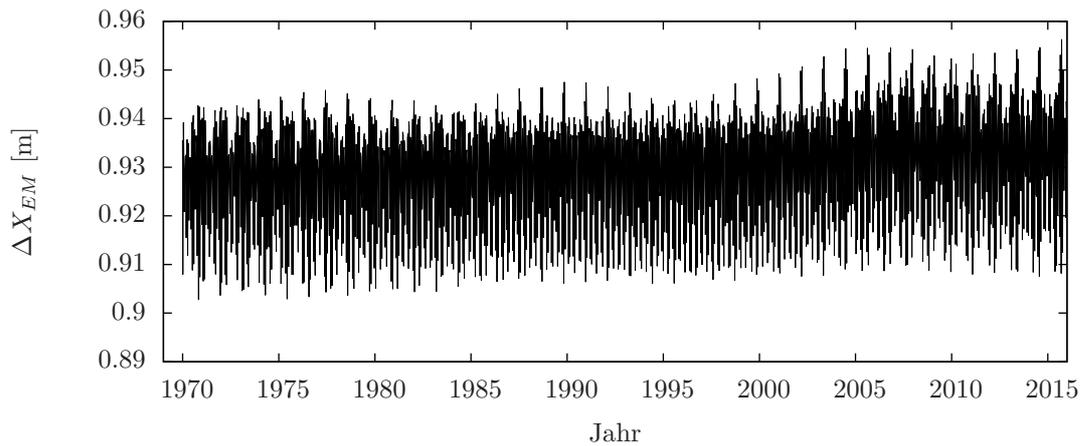


Abb. 6.6: Differenz des Erde-Mond-Abstandes ΔX_{EM} zwischen einer mit $\Delta(m_g/m_i)_{EM} = 5 \times 10^{-13}$ gestörten und ungestörten Bahn.

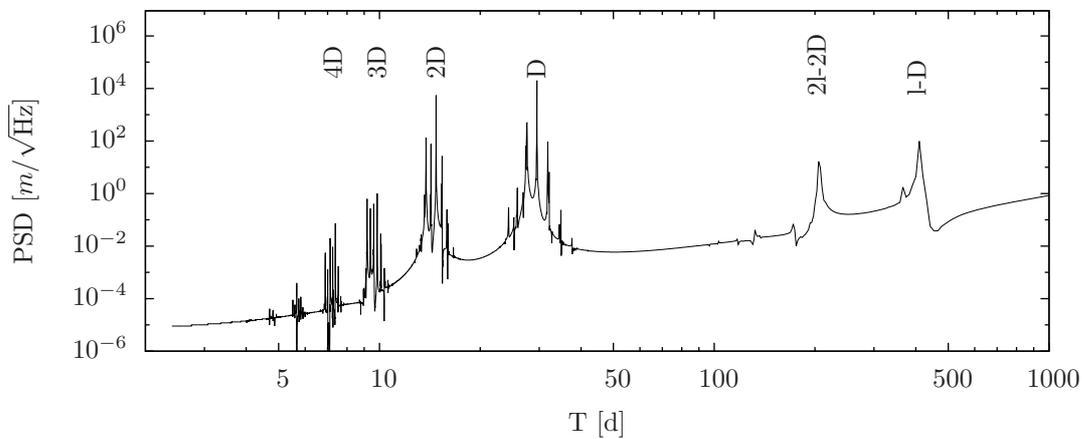


Abb. 6.7: Leistungsdichtespektrum der Differenzen aus Abbildung 6.6.

stärksten Spektrallinien. Neben der dominierenden synodischen Periode existieren deutliche Signalanteile mit den Perioden von 412 Tagen ($l - D$), 212 Tagen ($2l - 2D$), 14.77 Tagen ($2D$), 9.84 Tagen ($3D$) und 7.38 Tagen ($4D$). Die Angaben in Klammern beziehen sich auf Vielfache der entsprechenden Frequenzen.

Der wrms der Residuen der konvergierten, mit $\Delta(m_g/m_i)_{EM} = 5 \times 10^{-13}$ gestörten, Lösung ist 1.17 mm größer als der wrms der Residuen der Standardlösung. Der Wert der Verbesserungsquadratsumme nimmt um 5% zu. Abbildung 6.8 zeigt die Differenz der Amplitudenspektren der ungewichteten Residuen ($\text{Spektrum}_{\Delta(m_g/m_i)} - \text{Spektrum}_{\text{Standard}}$). Über einen großen Frequenzanteil sind die Residuen zwischen den Lösungen nahezu identisch, die Standardabweichung der Differenzen beträgt 0.13 mm. Die größte Abweichung mit 3.3 mm tritt, wie erwartet, bei der Periode von 29.53 Tagen (D) mit der Frequenznummer 223 auf. Abweichungen in der Größenordnung der 5-fachen Standardabweichung der Differenzen treten mit den Perioden um $2l - 2D$, $2D$ und $3D$ mit den Frequenznummern 32, 446 und 669 auf. Nach [Damour und Vokrouhlický \[1996a\]](#) und [Nordtvedt und Vokrouhlický \[1997\]](#) treten bei einer Verletzung des Äquivalenzprinzips Perioden von D und $3D$ auf. Die $2D$ -Perioden deuten auf Wechselwirkungen mit Gezeiteneffekten der Sonne auf die Mondbahn hin [[Nordtvedt, 2003](#)]. Das Ergebnis zeigt deutlich, dass bei einer künstlichen Verletzung des Äquivalenzprinzips um das 10-fache des geschätzten realistischen Fehlers, ein deutlicher systematischer Effekt mit der Periode des synodischen Monats in den Residuen auftritt, der nicht durch die Anpassung der anderen Modellparameter absorbiert werden kann. Die verschiede-

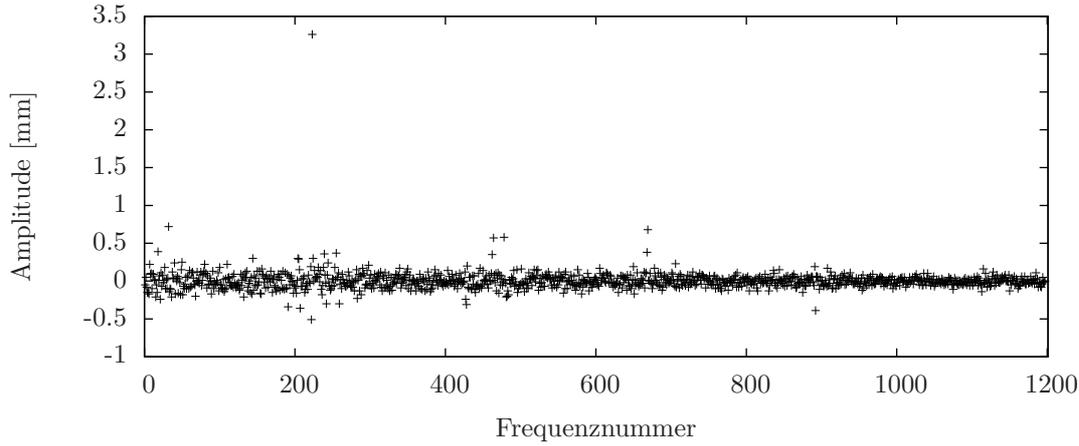


Abb. 6.8: Differenz der ungewichteten 1-Weg-Residuen-Amplitudenspektren zwischen der mit $\Delta(m_g/m_i)_{EM} = 5 \times 10^{-13}$ gestörten Lösung und der Standardlösung.

nen Tests auf eine mögliche Verletzung des Äquivalenzprinzips in Richtung zur Sonne zeigen im Rahmen der realistischen Genauigkeiten keine Abweichung von der Einstein'schen Theorie.

6.2.2 Test bezüglich der Richtung zum galaktischen Zentrum

Unter der Annahme der Gültigkeit der Einstein'schen Gravitationstheorie kann ein großer Teil der Materie im Universum nicht durch elektromagnetische Strahlung sondern nur durch ihre gravitative Wirkung beobachtet werden. Auf die Existenz dieser sogenannten Dunklen Materie weisen verschiedene Beobachtungen hin. Ein Beispiel ist die Diskrepanz zwischen beobachteter und theoretisch vorhergesagter Umlaufgeschwindigkeit der Sterne in unserer Galaxie in Abhängigkeit vom Abstand zum galaktischen Zentrum, die durch die Existenz von Dunkler Materie erklärt werden kann [Pato und Iocco, 2015]. Die Zusammensetzung der Dunklen Materie ist unbekannt und Gegenstand aktueller Forschung, zum Beispiel in Porter u. a. [2011] und Mayet u. a. [2016].

Ein Test auf eine differentielle Beschleunigung zwischen Dunkler Materie sowie Erde und Mond als unterschiedlich aufgebaute Körper wurde von Nordtvedt [1994] vorgeschlagen. Falls die gravitative Kopplung zwischen Dunkler Materie und „gewöhnlicher“ Materie von Erde und Mond das Äquivalenzprinzip nicht erfüllt, würde dies eine zusätzliche Distanzänderung mit siderischer Periode zwischen Erde und Mond in Richtung des galaktischen Zentrums hervorrufen. Eine mögliche Verletzung des Äquivalenzprinzips wurde auf zwei verschiedene Arten getestet.

1. Da die Ekliptikebene den galaktischen Äquator nur wenige Grad neben der Richtung zum galaktischen Zentrum schneidet, kann die Amplitude A einer möglichen Oszillation ΔX_{EMDM} der Mondbahn über

$$\Delta X_{EMDM} = A \cos(\omega_{sid}t - \theta_{gal}) \quad (6.19)$$

geschätzt werden [Nordtvedt u. a., 1995]. Die siderische Kreisfrequenz ist mit ω_{sid} bezeichnet und nimmt den Wert von $= 2\pi/27.32166$ d ein. θ_{gal} ist die ekliptikale Länge des galaktischen Zentrums mit $\theta_{gal} = 266.8^\circ$. Die Ableitung nach A wurde analytisch aus Gleichung (6.19) bestimmt. Die geschätzte Amplitude zeigt eine sehr hohe Korrelation mit den z-Komponenten der Stationskoordinaten und den Winkeln Θ_x und $\dot{\Theta}_x$ der Störrotationen. In der Schätzung wurden daraufhin die Störrotationen auf die Werte der Standardlösung fixiert und die z-Komponenten mit einem Constraint von 2 mm versehen. Für die Amplitude ergibt sich damit

$$A = -3.0 \pm 3.3 \text{ mm} \quad (6.20)$$

mit einem realistischem Fehler vom 3-fachen Wert des formalen Fehlers aus der Ausgleichung. Dieser Wert liefert eine um den Faktor 2 reduzierte obere Grenze für eine Verletzung des Äquivalenzprinzips in Richtung des galaktischen Zentrums, verglichen mit dem früheren LLR-Ergebnis in Verbindung mit der alten Programmversion [Müller u. a., 2012]. Mit der anomalistischen Kreisfrequenz $\omega_{ano} = 2\pi/27.55455$ d und der Beziehung

$$A = -\frac{3}{2} \frac{\delta g_{gal}}{\omega_{sid}(\omega_{sid} - \omega_{ano})} \quad (6.21)$$

kann die Obergrenze einer zusätzlichen differentiellen Beschleunigung δg_{gal} in Richtung des galaktischen Zentrums abgeschätzt werden [Nordtvedt u. a., 1995], es ergibt sich

$$\delta g_{gal} = (1.2 \pm 1.4) \times 10^{-16} \text{ m/s}^2 . \quad (6.22)$$

2. In einer zweiten Lösung wurde eine zusätzliche Beschleunigung des Mondes in Richtung des galaktischen Zentrums in die Ephemeridenrechnung implementiert. Geschätzt wird in diesem Fall ein Skalierungsfaktor a_{gal} der galaktischen Beschleunigung auf das Sonnensystem $\ddot{\mathbf{x}}_{gal} = 1.9 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2$ [Damour und Vokrouhlický, 1996b] mit numerisch berechneter Ableitung. Der Skalierungsfaktor wird ebenfalls mit fixierten Störrotationen Θ_x und $\dot{\Theta}_x$ zu

$$a_{gal} = (-4.3 \pm 5.9) \times 10^{-7} . \quad (6.23)$$

mit einem 3-fachen formalen Fehler als realistischem Fehlermaß geschätzt. Für die differentielle Gesamtbeschleunigung ergibt sich damit

$$\delta g_{gal} = (-0.8 \pm 1.1) \times 10^{-16} \text{ m/s}^2 \quad (6.24)$$

und zeigt eine gute Übereinstimmung der erreichten Genauigkeiten mit dem Ergebnis in Gleichung (6.22).

Durch Addition von Vielfachen von 30° zur Richtung des galaktischen Zentrums θ_{gal} wurde ein Test nach radialen siderischen Oszillationen der Mondbahn in andere Richtungen entlang der Ekliptik durchgeführt. Dabei traten in Abhängigkeit von der betrachteten Richtung auch Korrelationen mit den Störrotationen Θ_y und $\dot{\Theta}_y$ auf. Während die Richtung des galaktischen Zentrums annähernd in die negative y-Richtung des inertialen Ekliptiksystems zeigt und dort hohe Korrelationen mit den x-Komponenten der Störrotationen auftreten, verschiebt sich die Korrelation zu den y-Komponenten der Störrotation, wenn die Testrichtung der radialen Oszillation entlang der ekliptikalen x-Achse zeigt. Aus diesem Grund werden alle Störrotationen für diesen Test auf die Werte der Standardlösung fixiert. Die Ursache für die in Müller u. a. [2012] festgestellte Variation der Amplitude in Abhängigkeit von der Richtung liegt vermutlich in der Korrelation mit nicht fixierten Elementen der Störrotation, die in der damaligen Lösung nicht näher untersucht wurde.

Tabelle 6.1 zeigt die geschätzten Amplituden mit den 3-fachen formalen Fehlern aus der Ausgleichung für mit $\Delta\theta$ abweichenden Richtungen vom galaktischen Zentrum. Die Amplituden liegen in jeder Richtung in der Größenordnung des Ergebnisses von Gleichung (6.20). Die verbleibende, richtungsabhängige Systematik in den geschätzten Amplituden ist gegenüber der Lösung in Müller u. a. [2012] deutlich reduziert. Hier liegt neben den Korrelationen mit den Störrotationen möglicherweise ein weiterer geometrischer Effekt zugrunde, der in künftigen Arbeiten untersucht werden sollte. Die besseren Genauigkeiten außerhalb der Richtung zum galaktischen Zentrum und seiner Gegenrichtung können zum Teil mit der Statistik der NP-Messungen erklärt werden. Die LLR-Bodenstationen befinden sich alle auf der nördlichen Hemisphäre. Bewegt sich der Mond in den südlichsten Deklinationen seiner Bahn mit ekliptikalen Längen zwischen 220° und 320° , gibt es

Tab. 6.1: Geschätzte Amplitude A einer radialen Oszillation der Mondbahn in Abhängigkeit von der ekliptikalen Länge λ . Bezüglich der Richtung des galaktischen Zentrums gilt $\lambda = \theta_{gal} + \Delta\theta$.

$\Delta\theta$ [°]	λ [°]	A [mm]
0	267	-2.9 ± 3.3
30	297	1.6 ± 2.1
60	327	2.1 ± 1.5
90	357	2.4 ± 1.5
120	27	3.2 ± 1.8
150	57	5.2 ± 2.4
180	87	2.9 ± 3.3
210	117	-1.6 ± 2.1
240	147	-2.3 ± 1.5
270	177	-2.4 ± 1.5
300	207	-3.2 ± 1.8
330	237	-5.2 ± 2.4

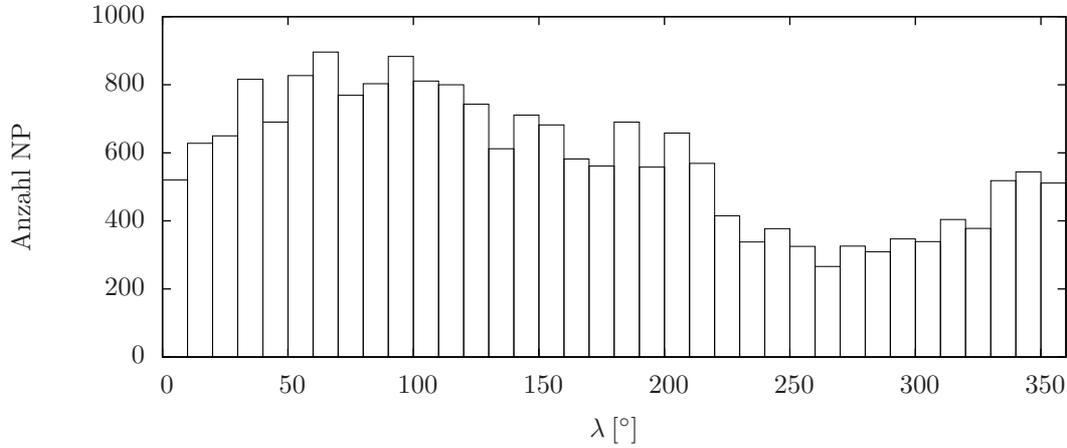


Abb. 6.9: Histogramm der NP über die ekliptikale Länge λ des Mondes.

durch die geringen Kulminationshöhen auf der nördlichen Hemisphäre weniger Beobachtungen in diesem Bahnbereich (Abbildung 6.9 mit ekliptikaler Länge des galaktischen Zentrums θ_{gal}). Eine mögliche Verschiebung der Bahn in Richtung des galaktischen Zentrums ist nur einseitig, auf der abgewandten Seite um $\lambda = 90^\circ$, gut beobachtet, während die maximalen Amplituden einer Verschiebung senkrecht zum galaktischen Zentrum in beiden Richtungen um $\lambda = 0^\circ$ und $\lambda = 180^\circ$ gut beobachtet sind.

Auch der Test bezüglich der Richtung zum galaktischen Zentrum und bezüglich anderen Richtungen entlang der Ekliptik, zeigt keine Verletzung des Äquivalenzprinzips mit einer Amplitude der siderischen Oszillation der Mondbahn größer als 4 mm. Der LLR-Test ergibt eine um den Faktor 20 genauere obere Grenze für eine mögliche Verletzung des Äquivalenzprinzips in Richtung des galaktischen Zentrums als aktuelle Laborexperimente [Wagner u. a., 2012]. Nach Damour und Vokrouhlický [1996b] beginnt der theoretisch interessante Bereich einer Kopplung mit Dunkler Materie bei einer oberen Grenze für die differentielle Beschleunigung von $< 1.0 \times 10^{-16} \text{ m/s}^2$ und liegt somit in erreichbarer Nähe für künftige LLR-Messungen.

6.3 Abstandsabhängige Modifikation der Gravitationswirkung

Die Erforschung einer distanzabhängigen Wirkung der Gravitation, auch bekannt unter dem Begriff „5te Kraft“, und damit eine räumliche Variation der Gravitationskonstanten, geht zurück auf

Fischbach u. a. [1986]. Die Gruppe führte eine erneute Analyse der Eötvös-Experimente durch, die das Verhältnis von träger und schwere Masse untersuchte [Eötvös u. a., 1922]. Eine mögliche Distanzabhängigkeit würde die quadratische Abnahme der Gravitationskraft mit steigendem Abstand zum anziehenden Körper (Newtons $1/r^2$ -Gesetz) verletzen. Die Modellierung erfolgt über einen zusätzlichen Yukawa-Term, mit dem das Newton'sche Gravitationspotential erweitert wird. Für das Erde-Mond-System mit $r = X_{EM}$ berechnet sich das Gravitationspotential zu

$$V_{EM}(X_{EM}) = \frac{GM_E M_M}{X_{EM}} \left(1 + \alpha_{yuk} e^{-X_{EM}/\lambda_{yuk}} \right), \quad (6.25)$$

mit der effektiven Reichweite λ_{yuk} und der Kopplungskonstanten α_{yuk} , für die in der Newton'schen und Einstein'schen Gravitationstheorie $\alpha_{yuk} = 0$ gilt. Tests des $1/r^2$ -Gesetzes wurden für verschiedene Werte für λ_{yuk} durchgeführt. Die bisher untersuchten effektiven Reichweiten erstrecken sich von der Größenordnung des Sonnensystems [Iorio, 2007] bis in den sub- μm -Bereich in Laborexperimenten [Klimchitskaya u. a., 2013]. In der LLR-Auswertung wird die effektive Reichweite auf den mittleren Erde-Mond-Abstand von $\lambda_{yuk} = 384000 \text{ km}$ fixiert und die partielle Ableitung nach α_{yuk} über numerische Differentiation berechnet. Dazu kann im Ephemeridenprogramm eine zusätzliche differentielle Beschleunigung zwischen Erde und Mond mit

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{\mathbf{x}}_{yuk} &= \ddot{\mathbf{x}}_{M,yuk} - \ddot{\mathbf{x}}_{E,yuk} \\ &= -\frac{\mathbf{x}_{EM}}{X_{EM}} \frac{GM_{E+M}}{X_{EM}} \alpha_{yuk} e^{-X_{EM}/\lambda_{yuk}} \left(\frac{1}{X_{EM}} + \frac{1}{\lambda_{yuk}} \right) \end{aligned} \quad (6.26)$$

berücksichtigt werden. Der geschätzte Parameter α weist eine sehr hohe Korrelation bis 84 % mit ω_c und 93 % mit der z-Komponente des Startwertes der Mondgeschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}_{z,Mond}$ auf, die in der folgenden Lösung auf die Werte der Standardlösung fixiert wurden. Damit ergibt sich für die Kopplungskonstante ein Wert von

$$\alpha_{yuk} = (-3.7 \pm 4.5) \times 10^{-12}. \quad (6.27)$$

Durch Festhalten von ω_c und $\dot{\mathbf{x}}_{z,Mond}$ verringert sich der formale Fehler etwa um den Faktor 3 und stellt einen zu optimistischen Wert dar, da verbleibende Systematiken (Kapitel 5.8 und Kapitel 6.1) nicht berücksichtigt sind. Somit wird in Gleichung (6.27) der 3-fache formale Fehler der Lösung mit nicht fixiertem ω_c und $\dot{\mathbf{x}}_{z,Mond}$ als realistisches Fehlermaß verwendet.

Zur Untersuchung des Effektes einer Verletzung des $1/r^2$ -Gesetzes im Erde-Mond-System wurde ein fester Wert von $\alpha_{yuk} = 5 \times 10^{-11}$ in die Ephemeridenrechnung eingeführt und das Modell mit allen Parametern der Standardlösung, inklusive ω_c und $\dot{\mathbf{x}}_{z,Mond}$, bestmöglich darauf angepasst. Die auftretenden Frequenzen einer Yukawa-gestörten Mondbahn wurden wieder durch den Vergleich des Yukawa-gestörten Erde-Mond-Abstandes zum Abstand der ungestörten Bahn abgeschätzt (Abbildung 6.10). Ein zusätzliches Yukawa-Potential führt ebenfalls zu einer zusätzlichen Präzession der Mondbahn, ähnlich der geodätischen Präzession [Adelberger, 2001]. Das resultierende Spektrum in Abbildung 6.11 ist ebenfalls nahezu identisch mit dem Spektrum der geodätischen Präzession in Abbildung 6.14 mit Vielfachen der Perioden des Arguments der Breite F in Kombination mit der anomalistischen Periode l .

Der wrms der Residuen der konvergierten, mit $\alpha_{yuk} = 5 \times 10^{-11}$ gestörten, Lösung ist 2.4 mm größer als der wrms der ungestörten Lösung, die Verbesserungsquadratsumme erhöht sich um 10 %. Die Differenz der Amplitudenspektren der gewichteten Residuen (Spektrum $_{\alpha_{yuk}}$ – Spektrum $_{\text{Standard}}$) ist in Abbildung 6.12 dargestellt. Die mit 1.7 mm größte Abweichung der Amplitude tritt mit der Periode von 26.88 Tagen ($2F - l$) bei Frequenznummer 245 auf. Die Abweichung beträgt etwa das 10-fache des Hintergrundrauschens der Differenzen aller Amplituden. Sie ist von der

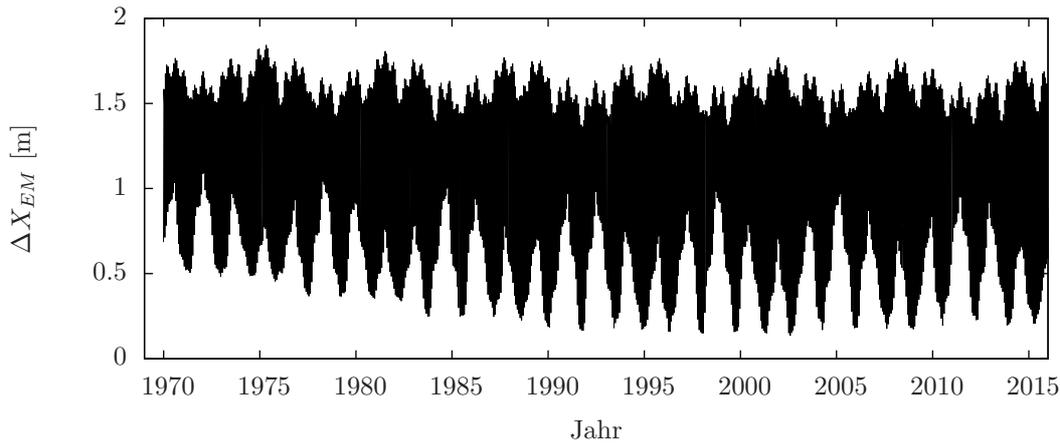


Abb. 6.10: Differenz des Erde-Mond-Abstandes ΔX_{EM} zwischen einer mit $\alpha_{yuk} = 5 \times 10^{-11}$ gestörten und ungestörten Bahn.

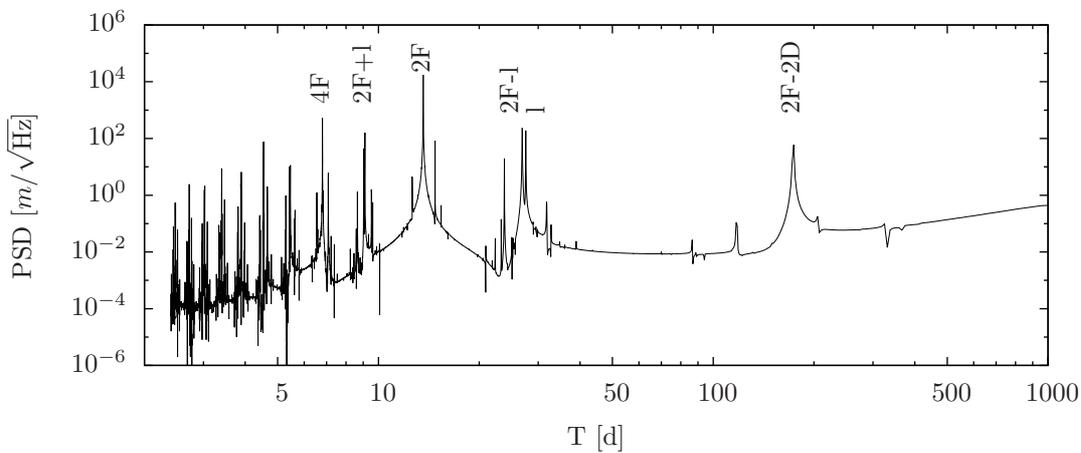


Abb. 6.11: Leistungsdichtespektrum der Differenzen aus Abbildung 6.10.

gleichen Größenordnung wie die erzwungene 11-fache $1/r^2$ -Verletzung, bezogen auf den Fehler aus Gleichung (6.27) in dieser Analyse. Der angegebene realistische Fehler liegt damit in einer plausiblen Größenordnung. Die anderen abgeschätzten Frequenzen aus der Abstandsänderung in Abbildung 6.11 treten in der Auswertung nicht auf und scheinen durch die veränderte Rotationsbewegung des Mondes absorbiert zu werden. Das Ergebnis im Differenzspektrum der gewichteten Residuen zeigt weiterhin, dass eine Verletzung des $1/r^2$ -Gesetzes nicht nur in den Beobachtungen der schwächer gewichteten Reflektoren A11, A14, L1 und L2 sichtbar wird, sondern auch in den Daten des in der Auswertung dominierenden A15-Reflektors. Damit werden die Effekte einer möglichen $1/r^2$ -Verletzung nicht vollständig durch eine veränderte Rotation absorbiert, sondern verbleiben auch in der Translationsbewegung, beziehungsweise im Erde-Mond-Abstand, in dem sie mit den genauen und mit hohem Gewicht versehenen A15-Daten leichter detektiert werden können. Im Rahmen der realistischen Genauigkeit konnte keine abstandsabhängige Variation der Gravitationskonstanten und somit keine Abweichung von der Einstein'schen Theorie festgestellt werden.

6.4 Geodätische Präzession

Das Erde-Mond-System kann als Kreisel im Gravitationsfeld der Sonne angesehen werden. Aus der relativistischen Beschreibung der Bewegung wird auf den Mond eine Beschleunigung ausgeübt, die eine relativistische Präzession des Mondorbits (geodätische oder deSitter Präzession) in der Grö-

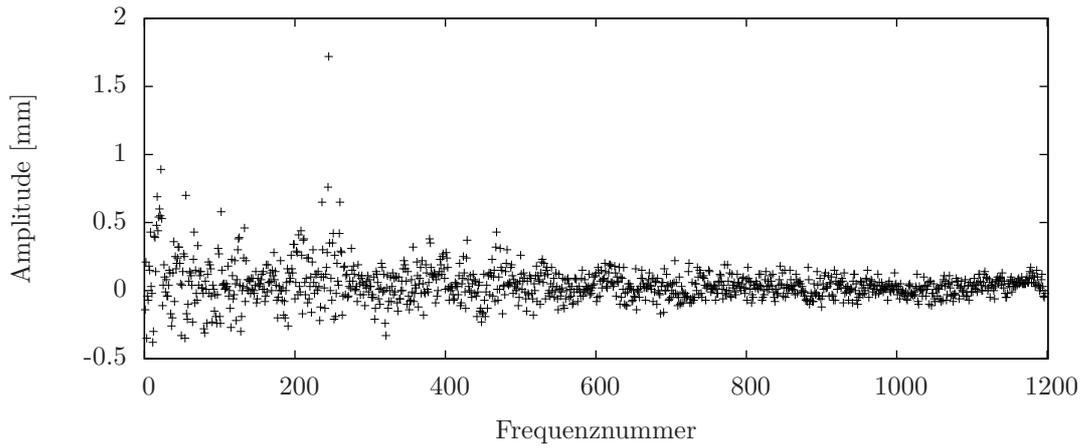


Abb. 6.12: Differenz der gewichteten 1-Weg-Residuen-Amplitudenspektren zwischen der mit $\alpha_{yuk} = 5 \times 10^{-11}$ gestörten Lösung und der Standardlösung.

Benordnung von rund 1.9 Bogensekunden pro Jahrhundert hervorruft [de Sitter, 1916]. Der Effekt der geodätischen Präzession ist in den relativistischen Bewegungsgleichungen (Kapitel 2.2.1) implizit enthalten. Basierend auf einer Methode von Shapiro u. a. [1988] wird die geodätische Präzession über die Beschleunigung

$$\ddot{\mathbf{x}}_{gp} = 2h\Omega_{gp} \times \dot{\mathbf{v}}_{EM} \quad (6.28)$$

zusätzlich ein zweites Mal in die Bewegungsgleichungen eingeführt. Ω_{gp} ist die Winkelgeschwindigkeit der geodätischen Präzession, \mathbf{v}_{EM} die Geschwindigkeit des Erde-Mond-Systems und h der zu bestimmende Parameter, der eine mögliche Abweichung zur von Einstein vorhergesagten geodätischen Präzession parametrisiert. Der Faktor h bestimmt eine relative Abweichung, wobei ein Wert von $h = 1.0$ eine Abweichung von 100% des in den EIH-Gleichungen enthaltenen Wertes der geodätischen Präzession bedeutet. Die Bestimmung der partiellen Ableitung nach h erfolgt durch numerische Differentiation. Wird der Parameter h zusammen mit den Parametern der Standardlösung geschätzt, treten hohe Korrelationen von bis zu 62% mit ω_c und eine sehr hohe Korrelation mit $\dot{\mathbf{x}}_{z,Mond}$ auf. Für die folgende Lösung wurden beide Parameter auf die Werte aus der Berechnung der Standardlösung fixiert. Damit ergibt sich

$$h = (-5.6 \pm 8.5) \times 10^{-4} . \quad (6.29)$$

Wie in der Schätzung des Yukawa-Parameters wird als realistisches Fehlermaß die 3-fache formale Genauigkeit der Lösung mit nicht fixiertem ω_c und $\dot{\mathbf{x}}_{z,Mond}$ angegeben, da durch das Festhalten der Parameter ein zu optimistischer formaler Fehler aus der Ausgleichung erhalten wird.

Der Effekt einer zusätzlichen geodätischen Präzession auf die Residuen der LLR-Analyse wurde mit einem festen Wert von $h = 5 \times 10^{-3}$ in den lunaren Bewegungsgleichungen der Ephemeridenrechnung (Translation und Rotation) und anschließender iterativer Parameterschätzung durchgeführt. Die Parameter ω_c und $\dot{\mathbf{x}}_{z,Mond}$ wurden als freie Parameter mitgeschätzt. Die Variationen des Erde-Mond-Abstandes der gestörten Bahn im Vergleich zur ungestörten Bahn sind in Abbildung 6.13 dargestellt. Die Ähnlichkeit zur Variation in X_{EM} bei einem zusätzlichen Yukawa-Term wird auch im entsprechenden Spektrum in Abbildung 6.14 deutlich. Es treten Perioden des Arguments der Breite F in Kombination mit der anomalistischen Periode l auf. Unterschiede zum Spektrum mit zusätzlichem Yukawa-Term treten bei benachbarten Frequenzen der stärksten Hauptspektrallinien auf, zum Beispiel in unmittelbarer Umgebung der zu $2F$, $2F - l$ und $2F + l$ gehörenden Spektrallinien.

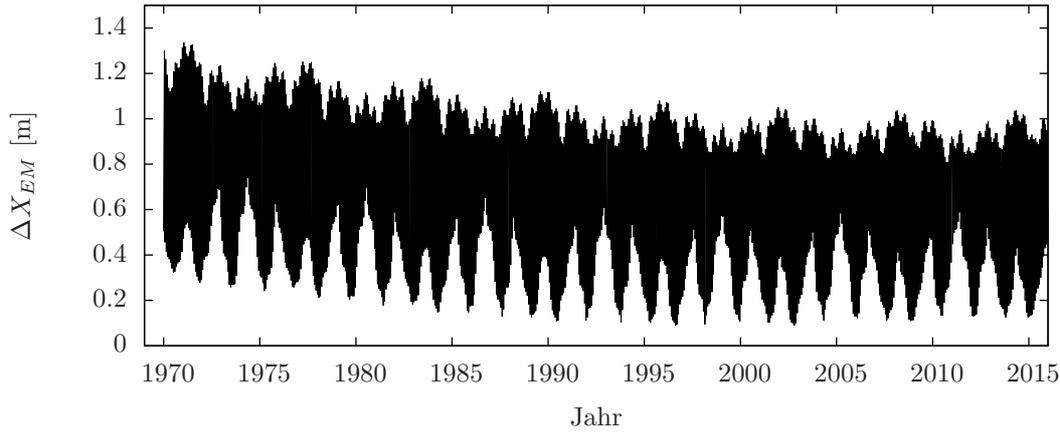


Abb. 6.13: Differenz des Erde-Mond-Abstandes ΔX_{EM} zwischen einer mit $h = 5 \times 10^{-3}$ gestörten und ungestörten Bahn.

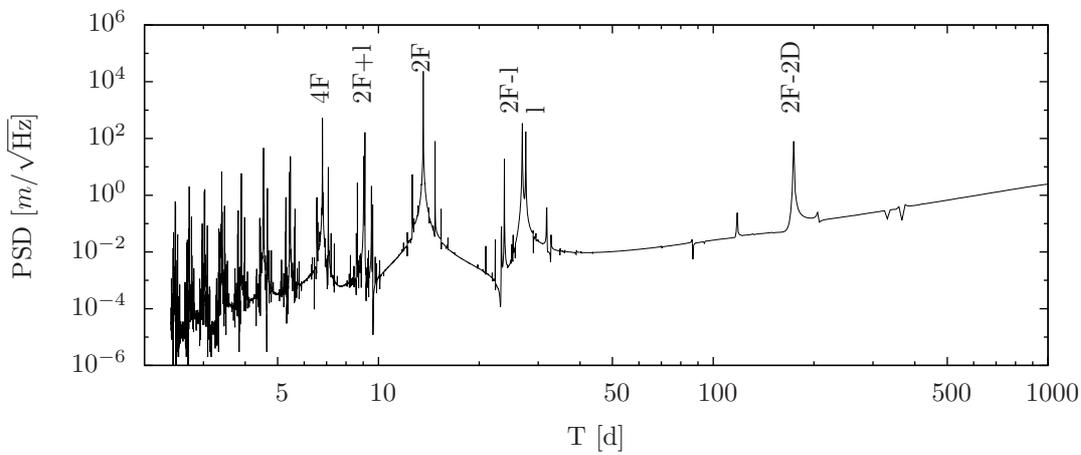


Abb. 6.14: Leistungsdichtespektrum der Differenzen aus Abbildung 6.13.

In der konvergierten Lösung der mit $h = 5 \times 10^{-3}$ gestörten Ephemeride erhöht sich der w_{rms} der Post-fit-Residuen um 1.1 mm und die Verbesserungsquadratsumme nimmt um 5% zu. Das Differenz-Amplitudenspektrum der gewichteten 1-Weg-Residuen ($\text{Spektrum}_h - \text{Spektrum}_{\text{Standard}}$) ist in Abbildung 6.15 dargestellt. Die Standardabweichung der Amplitudendifferenzen über alle Amplituden beträgt 0.1 mm. Die größte Abweichung tritt mit 1 mm bei einer Periode von 26.88 Tagen ($2F - l$) und der Frequenznummer 245 auf. Im Vergleich zum Hintergrundrauschen der Differenzen zeigt sich die erzwungene zusätzliche geodätische Präzession deutlich in dieser Spektrallinie, sodass der angenommene realistische Fehler von 8.5×10^{-4} plausibel erscheint. Analog zu Kapitel 6.3 finden sich die weiteren Frequenzen aus der Differenz von X_{EM} in den Residuen nicht wieder, sodass auch hier davon ausgegangen wird, dass diese Perioden von den Parametern der Mondrotation teilweise absorbiert wurden. Im Rahmen des realistischen Fehlers zeigt sich keine zusätzliche geodätische Präzession der Mondbahn im Vergleich zur Vorhersage der Einstein'schen Theorie.

6.5 Schätzung von PPN-Parametern

Gravitationstheorien können für schwache Gravitationsfelder und, im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit, kleinen Geschwindigkeiten in einer parametrisierten nach-Newton'schen Näherung mit einer Reihe von dimensionslosen post-Newton'schen Parametern (PPN-Parametern) dargestellt werden

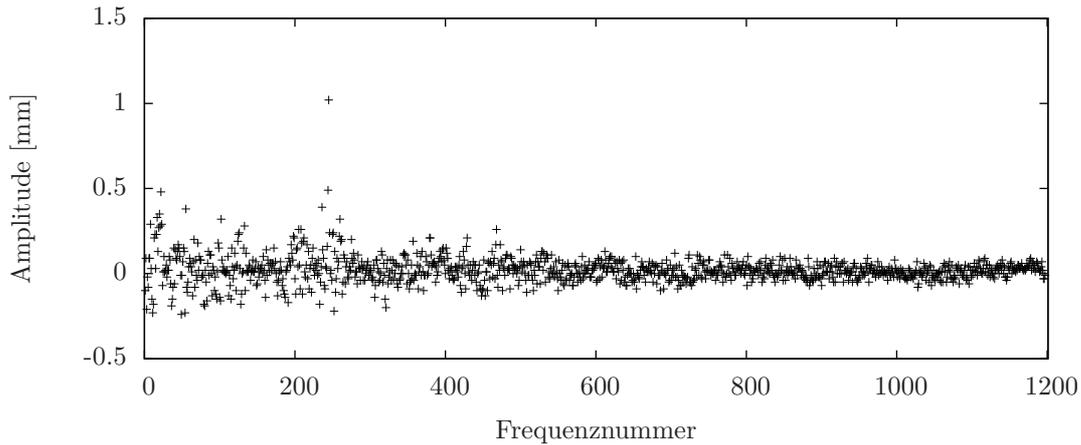


Abb. 6.15: Differenz der gewichteten 1-Weg-Residuen-Amplitudenspektren zwischen der mit $h = 5 \times 10^{-3}$ gestörten Lösung und der Standardlösung.

[Will, 1993, 2014]. Einige dieser Parameter können mit LLR bestimmt, beziehungsweise die obere Grenze einer möglichen Abweichung vom Wert der Einstein'schen Theorie angegeben, werden.

6.5.1 Metrikparameter γ und β

Die beiden in den EIH-Gleichungen (2.6) enthaltenen PPN-Parameter β und γ gehören zu den wichtigsten Parametern eines Tests der Einstein'schen Gravitationstheorie. Sie sind die einzigen Parameter, die einen von 0 verschiedenen Wert aufweisen und in der Einstein'schen Theorie mit $\beta = 1$ und $\gamma = 1$ angegeben sind. Der Parameter β beschreibt das Maß an Nichtlinearität im Superpositionsgesetz für Gravitation, das heißt wie viel Gravitation durch die Gravitation selbst erzeugt wird. Der Raumkrümmungsparameter γ ist ein Maß für die von einer Einheitsmasse erzeugte Raumkrümmung [Will und Nordtvedt, 1972].

Der Raumkrümmungsparameter kann zum Beispiel aus der gravitativen Lichtablenkung in der Nähe von großen Massen, wie Sonne und Planeten, oder aus der gravitativen Laufzeitverzögerung (Shapiro-Effekt) abgeleitet werden. Die genauesten Messungen von γ stammen aus der Analyse von Daten der Saturn-Sonde Cassini, Bertotti u. a. [2003] erhielten einen Wert von $\gamma - 1 = (2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}$. Aus der Analyse von VLBI-Daten erhielten Lambert und Le Poncin-Lafitte [2011] einen Wert von $\gamma - 1 = (-0.8 \pm 1.2) \times 10^{-4}$. Aus den Ephemeriden des Sonnensystems bestimmten Fienga u. a. [2014b] einen Wert von $\gamma - 1 = (-1.5 \pm 4.8) \times 10^{-5}$ und Pitjeva und Pitjev [2013] einen Wert von $\gamma - 1 = (4 \pm 6) \times 10^{-5}$. Eine Bestimmung anhand von LLR-Daten wurde zum Beispiel von Williams u. a. [1996a] mit $\gamma - 1 = (0 \pm 5) \times 10^{-3}$ durchgeführt. Künftige Analysen der Gaia-Mission und von zukünftigen Missionen wie ASTROD I könnten die erreichten Genauigkeiten um eine bis drei Größenordnungen verbessern [Hobbs u. a., 2010; Selig u. a., 2013].

In dieser Arbeit wurde die Ableitung nach γ über numerische Differentiation berechnet. In der Ausgleichung zeigten sich hohe Korrelationen von bis zu 82% zu einigen Stationskoordinaten und der z-Komponente der Startwerte für die Mondgeschwindigkeit und mittlere Korrelationen von 47% zu den Störrotationen Θ_y und $\dot{\Theta}_y$. Für die folgende Lösung wurden die Störrotationen auf dem Wert der Standardlösung fixiert und die Stationskoordinaten mit einem Constraint von 2 mm in die Parameterschätzung eingeführt. Damit ergibt sich

$$\gamma - 1 = (-1.2 \pm 1.2) \times 10^{-4} . \quad (6.30)$$

Als realistisches Fehlermaß ist der 3-fache formale Fehler aus der Ausgleichung angegeben. Der Wert liegt in der gleichen Größenordnung wie Resultate aus alleinigen VLBI-Messungen und ist

eine weitere unabhängige Bestätigung der Gültigkeit der Einstein'schen Theorie. Er erreicht jedoch nicht die hohen Genauigkeiten aus der Analyse der Ephemeriden des Sonnensystems oder der Cassini-Mission.

Der Parameter β kann beispielsweise anhand der Ephemeriden des Sonnensystems bestimmt werden. [Fienga u. a. \[2014b\]](#) bestimmten einen Wert von $\beta - 1 = (-0.25 \pm 6.7) \times 10^{-5}$, die Analyse von [Pitjeva und Pitjev \[2013\]](#) führt zu $\beta - 1 = (-2 \pm 3) \times 10^{-5}$. Schätzungen aus LLR-Daten ergaben $\beta - 1 = (1.2 \pm 1.1) \times 10^{-4}$ [[Williams u. a., 2009](#)] und $\beta - 1 = (0.6 \pm 1.1) \times 10^{-4}$ [[Müller u. a., 2014](#)]. Künftige Raummissionen wie ASTROD I könnten die Genauigkeit bis in den Bereich von 6×10^{-6} verbessern [[Selig u. a., 2013](#)].

Die Schätzung von β erfolgt in dieser Arbeit auf zwei verschiedenen Wegen. Die erste Methode ist eine direkte Schätzung von β über die EIH-Gleichung (2.6) mit numerisch erzeugten Ableitungen. Dabei treten zu den gleichen Parametern Korrelationen auf, wie auch bei der Schätzung von γ . Aus diesem Grund wurden die Störrotationen Θ_y und $\dot{\Theta}_y$ fixiert und der Constraint der Stationskoordinaten für die folgende Lösung beibehalten. Es ergibt sich ein Wert von

$$\beta - 1 = (-8.7 \pm 9.0) \times 10^{-5} . \quad (6.31)$$

Der angegebene realistische Fehler entspricht dem 3-fachen formalen Fehler aus der Ausgleichung. Die zweite Methode basiert auf einer Linearkombination von weiteren PPN-Parametern. Unter der Annahme, dass es keine materialabhängige Verletzung des Äquivalenzprinzips gibt und keine Effekte aufgrund von bevorzugten Bezugssystemen auftreten, ist der Parameter β über

$$\beta = \frac{1}{4}(\eta + \gamma + 3) \quad (6.32)$$

mit dem Nordtvedt- und Raumkrümmungsparameter verbunden. Mit dem geschätzten Nordtvedt-Parameter in Gleichung (6.13) und dem Cassini-Wert für γ folgt

$$\beta - 1 = (-4.5 \pm 5.6) \times 10^{-5} . \quad (6.33)$$

Das Ergebnis der zweiten Methode profitiert deutlich von der hohen Qualität des Äquivalenzprinzip-Tests.

Der Effekt eines von der Einstein'schen Theorie abweichenden Wertes für β wurde durch einen festen Wert von $\beta - 1 = 5 \times 10^{-4}$ in der Ephemeridenrechnung und anschließender iterativen Parameterschätzung untersucht. Die partiellen Ableitungen nach β wurden durch numerische Differentiation berechnet. Abbildung 6.16 zeigt die resultierende Differenz des Erde-Mond-Abstandes X_{EM} der konvergierten Lösung zur ungestörten Lösung. Das zugehörige Leistungsdichtespektrum ist in Abbildung 6.17 dargestellt. Variationen in X_{EM} treten mit der anomalistischen Periode von 27.56 Tagen (l) und der halben Periodendauer des Arguments der Breite mit 13.61 Tagen ($2F$) auf. Weitere Signalanteile sind auch in Kombination mit der synodischen Periode bei 31.81 Tagen ($2D - l$), bei 14.77 Tagen ($2D$) und bei 9.11 Tagen ($2F + l$) vorhanden.

Der wrms der Residuen, in der mit $\beta - 1 = 5 \times 10^{-5}$ gestörten Lösung, ist mit 0.13 mm nur geringfügig größer als der wrms der ungestörten Lösung. Die Verbesserungsquadratsumme erhöht sich ebenfalls nur leicht um 0.5 %. Das deutet darauf hin, dass die restlichen Parameter des Modells den Effekt der Änderung von β zu einem großen Teil absorbieren. Insbesondere die Vielzahl an hoch korrelierten Parametern (siehe oben), die in dieser Analyse als freie Parameter mitgeschätzt wurden, können die Effekte kompensieren. Das Fixieren von Θ_y und $\dot{\Theta}_y$ sowie Einführen eines Constraints an die Stationskoordinaten führt zu größeren Änderungen in der konvergierten β -gestörten Lösung. Der wrms der gestörten Lösung nimmt um 0.4 mm zu, der Wert der Verbesserungsquadratsumme steigt um 2 %. Allerdings entspricht dieses Vorgehen nicht der üblichen Standardlösung, in der

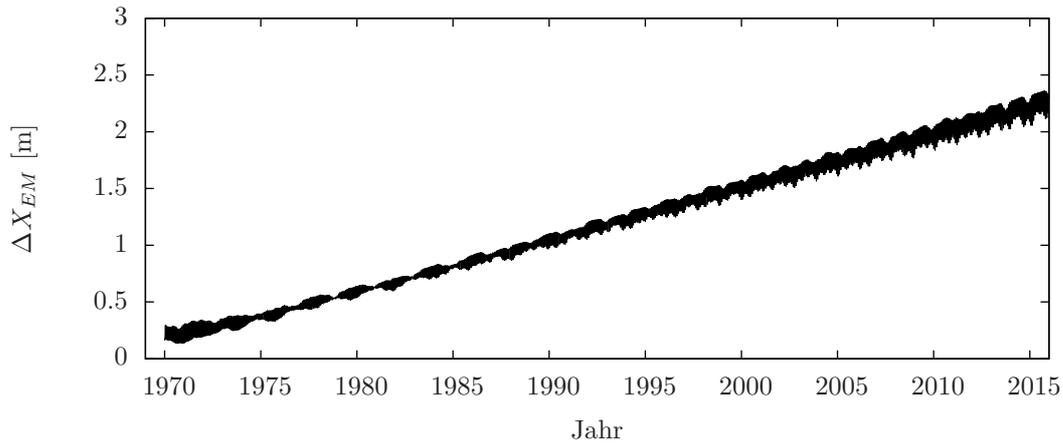


Abb. 6.16: Differenz des Erde-Mond-Abstandes ΔX_{EM} zwischen einer mit $\beta - 1 = 5 \times 10^{-4}$ gestörten und ungestörten Bahn.

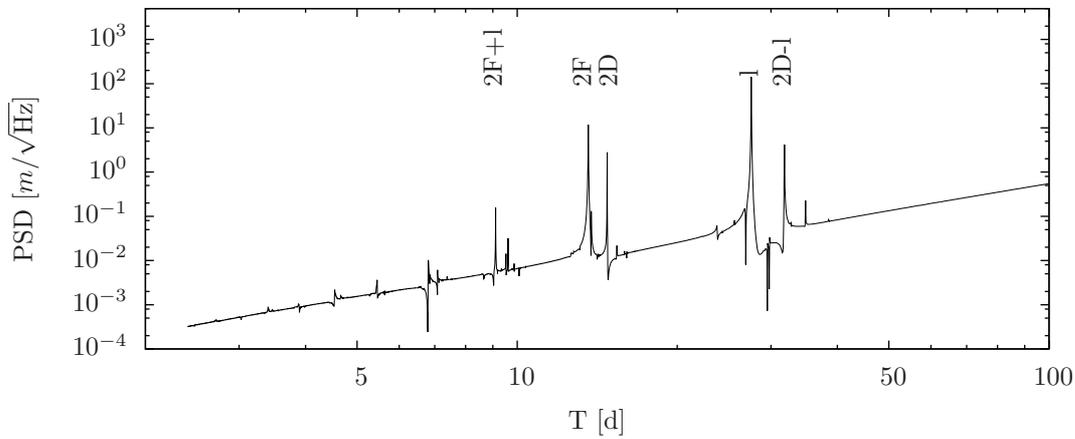


Abb. 6.17: Leistungsdichtespektrum der Differenzen aus Abbildung 6.16.

die fixierten und mit einem Constraint versehenen Parameter frei mitgeschätzt werden. Sie besitzt damit weniger Aussagekraft, sodass diese Variante nicht genutzt wird.

Abbildung 6.18 zeigt die Differenz ($\text{Spektrum}_\beta - \text{Spektrum}_{\text{Standard}}$) der Amplitudenspektren der gewichteten Residuen. Mit den geringen Änderungen im Gesamt-wrms und der Verbesserungsquadratsumme sind auch im Spektrum keine deutlichen Signalanteile zu erwarten. Die Standardabweichung über alle Amplituden beträgt 0.03 mm und belegt den sehr ähnlichen Verlauf der Spektren beider Lösungen. Ein größerer Unterschied tritt im Bereich der ersten 300 Amplituden mit Perioden >20 Tagen auf, die Standardabweichung beträgt hier 0.046 mm. Im Unterschied zum Spektrum von X_{EM} tritt die größte Abweichung von 0.18 mm bei einer Periode von $2F - l$ mit der Frequenznummer 245 auf. Die Amplituden mit den Perioden von $2D - l$ und l (Frequenznummern 207 und 239) sind in der β -gestörten Lösung 0.11 mm und 0.13 mm kleiner als in der ungestörten Lösung. Das Beispiel zeigt, dass die alleinige Abschätzung der gestörten Perioden aus der Entfernungsänderung zwischen Erde und Mond nicht ausreichend ist und die Änderung in der Rotationskomponente ebenfalls einen deutlichen Einfluss hat. Die im Ergebnis der direkten Schätzung von β angegebene Genauigkeit kann als plausibel angesehen werden, wenn der 4-fache Wert der Amplitude der Periode $2F - l$ gegenüber dem Hintergrundrauschen mit dem erzwungenem 5-fachen Wert des realistischen Fehlers von $\beta - 1$ in der Ephemeridenrechnung verglichen wird.

Im Rahmen des ermittelten realistischen Fehlers zeigen die beiden geschätzten PPN-Parameter β und γ keine Abweichung vom Wert 1 und der Einstein'schen Gravitationstheorie.

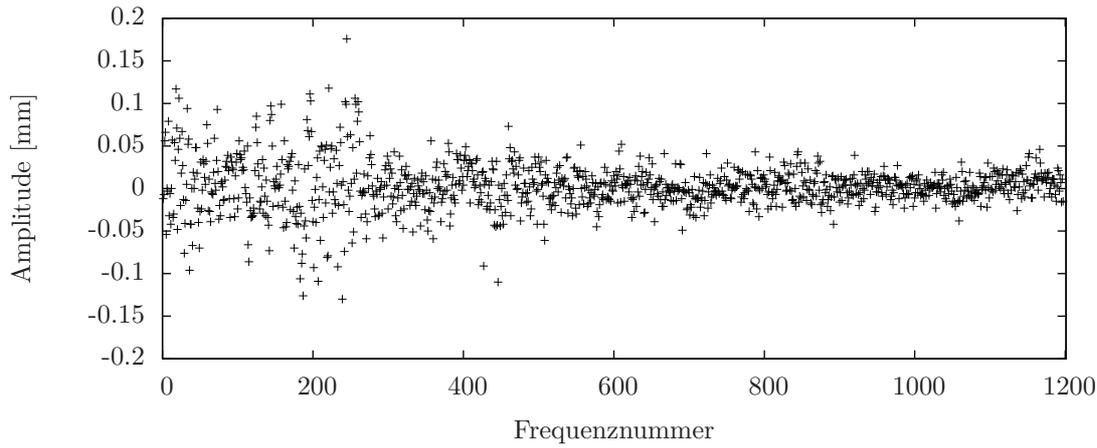


Abb. 6.18: Differenz der gewichteten 1-Weg-Residuen-Amplitudenspektren zwischen der mit $\beta - 1 = 5 \times 10^{-4}$ gestörten Lösung und der Standardlösung.

6.5.2 Parameter der bevorzugten Bezugssysteme, α_1 und α_2

Einige zu Einstein's Gravitationstheorie alternative Theorien der Gravitation fordern die Existenz eines bevorzugten Bezugssystems, das zum Beispiel an der großräumigen Verteilung der Materie im Universum „fixiert“ ist. Eine Bewegung relativ zu diesem Bezugssystem, ausgedrückt durch die Bewegung bezogen auf den kosmischen Mikrowellenhintergrund, würde zu zusätzlichen Beschleunigungstermen in der Ephemeridenrechnung führen. Im PPN-Formalismus werden die Effekte durch die Parameter α_1 , α_2 und α_3 beschrieben [Will und Nordtvedt, 1972; Will, 2014]. Entsprechende Parameter in einer Umgebung mit starken Gravitationsfeldern sind mit $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_2$ und $\hat{\alpha}_3$ bezeichnet [Shao und Wex, 2012]. Alle Parameter sind in der Einstein'schen Theorie gleich 0.

Die Beobachtung von Pulsaren erlaubt die Bestimmung von Parametern der bevorzugten Bezugssysteme in der Umgebung starker Gravitationsfelder. $\hat{\alpha}_1$ wurde von Shao und Wex [2012] zu $\hat{\alpha}_1 = (-0.4 \pm 3.4) \times 10^{-5}$ bestimmt. In Shao u. a. [2013] ist der Parameter $\hat{\alpha}_2$ zu $|\hat{\alpha}_2| < 1.6 \times 10^{-9}$ bestimmt worden. Der Parameter $\hat{\alpha}_3$ wurde aus Beobachtungen von Doppelpulsaren zu $|\hat{\alpha}_3| < 4 \times 10^{-20}$ bestimmt [Stairs u. a., 2005]. Im Einflussbereich von schwachen Gravitationsfeldern im Sonnensystem wurde der Parameter α_1 aus LLR-Messungen von Müller u. a. [2014] zu $\alpha_1 = (3.7 \pm 2.7) \times 10^{-5}$ und von Iorio [2014a] aus der Präzession der Orbits der inneren Planeten zu $\alpha_1 = (-1 \pm 6) \times 10^{-6}$ geschätzt. Den Parameter α_2 leitete Nordtvedt [1987] durch die geringe Abweichung des Rotationsvektors der Sonne zum Drehimpulsvektor des Sonnensystems zu $|\alpha_2| < 2.4 \times 10^{-7}$ ab. Aus den planetaren Ephemeriden bestimmte Iorio [2014a] $\alpha_2 = (-0.9 \pm 3.5) \times 10^{-5}$, die LLR-Auswertung ergab $\alpha_2 = (2.3 \pm 1.0) \times 10^{-5}$ [Müller u. a., 2014]. Eine Steigerung der Genauigkeit für α_1 und α_2 könnte durch die BepiColumbo-Mission zum Merkur möglich sein [Ashby u. a., 2007]. Für den Parameter α_3 schätzte Iorio [2014b] eine obere Grenze von $\alpha_3 < 6 \times 10^{-6}$ aus Ephemeridendaten ab. Aus alleinigen LLR-Daten wurde α_3 bisher noch nicht untersucht.

In dieser Arbeit werden die partiellen Ableitungen nach α_1 und α_2 durch numerische Differentiation berechnet. Dazu enthält die Ephemeridenrechnung zusätzliche Beschleunigungsterme nach Müller u. a. [1996] und Damour und Vokrouhlický [1996b], die auf Erde und Mond wirken. Der Parameter α_1 zeigt nur geringe Korrelationen mit den anderen Parametern und wurde zu

$$\alpha_1 = (-1.1 \pm 1.5) \times 10^{-5} \quad (6.34)$$

geschätzt. α_2 weist Korrelationen bis zu 62% mit den Stationskoordinaten und 68% mit τ_{21} und τ_{22} auf. Die Stationskoordinaten wurden daraufhin in der Auswertung mit einem Constraint von

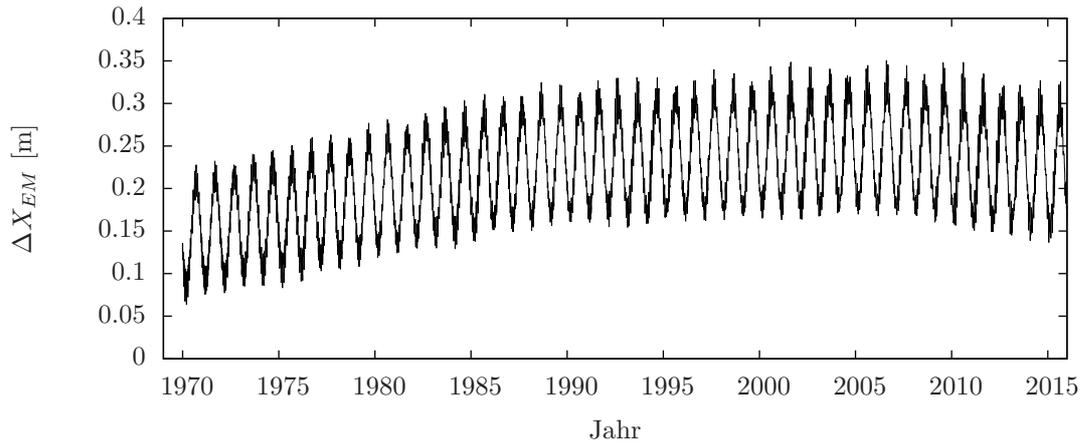


Abb. 6.19: Differenz des Erde-Mond-Abstandes ΔX_{EM} zwischen einer mit $\alpha_1 = 5 \times 10^{-5}$ gestörten und ungestörten Bahn.

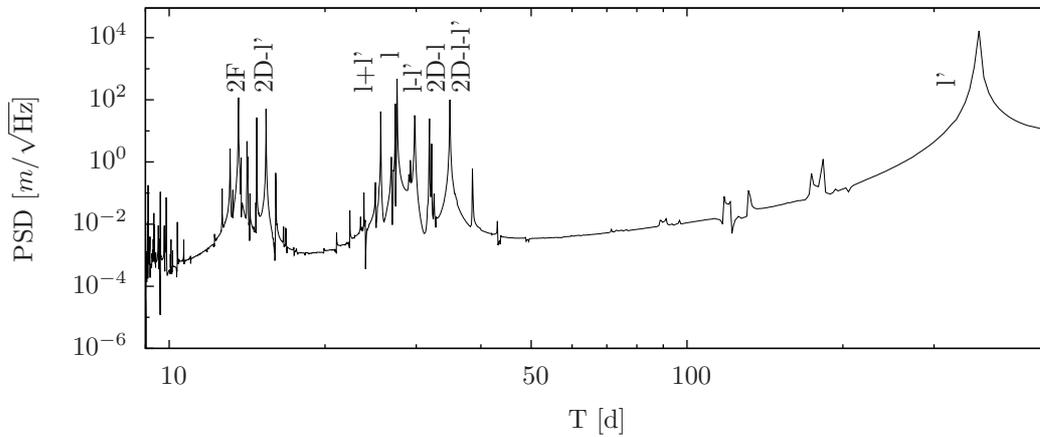


Abb. 6.20: Leistungsdichtespektrum der Differenzen aus Abbildung 6.19.

2 mm versehen und es ergibt sich

$$\alpha_2 = (-6.0 \pm 9.0) \times 10^{-6} . \quad (6.35)$$

Die formalen Fehler aus der Ausgleichung sind bei beiden Parametern sehr klein. Bei den angegebenen realistischen Fehlern handelt es sich um die mit dem Faktor 10 multiplizierten formalen Fehler. Die Gründe für das sehr niedrige Niveau der formalen Fehler im Vergleich zu den anderen Parametern in diesem Kapitel sind Gegenstand zukünftiger Untersuchungen. Mögliche Ursachen können die nicht berücksichtigten Korrelationen zwischen den Beobachtungen sein (Kapitel 6.1). Weiterhin sollte in künftigen Arbeiten untersucht werden, ob die Modellierung der entsprechenden Beschleunigungen für die Berechnung der partiellen Ableitungen weiter verfeinert werden müssen.

Der Effekt eines möglichen bevorzugten Bezugssystems in der LLR-Analyse wurde am Beispiel des Parameters α_1 untersucht. In der Ephemeridenrechnung wurde ein fester Wert von $\alpha_1 = 5 \times 10^{-5}$ eingeführt und das Modell iterativ bestmöglich angepasst. Abbildung 6.19 zeigt die Entwicklung der Differenz von X_{EM} , in Abbildung 6.20 ist das zugehörige Leistungsdichtespektrum dargestellt. Neben der für α_1 charakteristischen jährlichen Periode (l') treten eine Vielzahl von weiteren Frequenzen in Kombination mit der anomalistischen und synodischen Periode von 34,85 Tagen ($2D - l - l'$), 31,82 Tagen ($2D - l$), 29,8 Tagen ($l - l'$), 27,56 Tagen (l) und 25,62 Tagen ($l + l'$) auf. Im halbmonatlichen Bereich sind markante Spektrallinien bei 15,39 Tagen ($2D - l'$), 14,77 Tagen ($2D$), 14,14 Tagen ($l' - 2F$), 13,61 Tagen ($2F$) und 13,11 Tagen ($l' + 2F$) vorhanden.

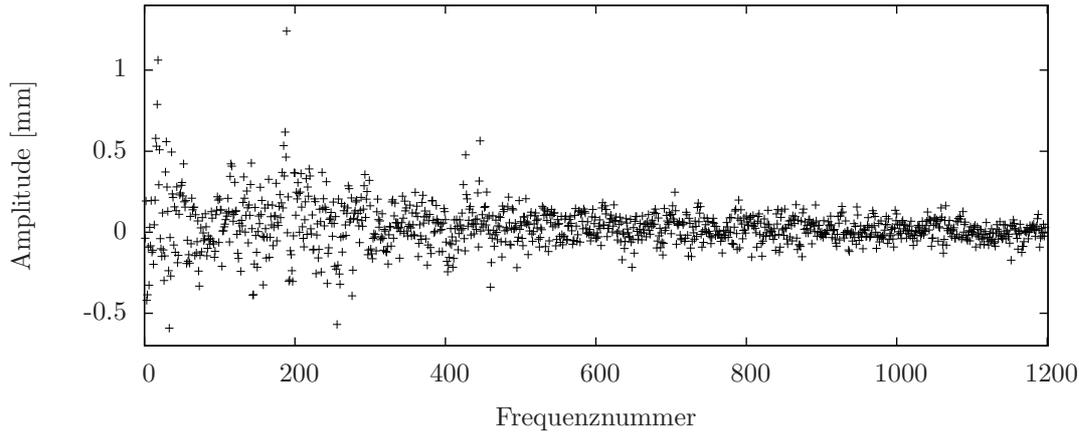


Abb. 6.21: Differenz der gewichteten 1-Weg-Residuen-Amplitudenspektren zwischen der mit $\alpha_1 = 5 \times 10^{-5}$ gestörten Lösung und der Standardlösung.

Der wrms der Post-fit-Residuen erhöht sich in der mit α_1 -gestörten Lösung um 1.6 mm gegenüber der Standardlösung und die Verbesserungsquadratsumme nimmt um 7% zu. Das Differenz-Amplitudenspektrum ($\text{Spektrum}_{\alpha_1} - \text{Spektrum}_{\text{Standard}}$) der gewichteten 1-Weg-Residuen ist in Abbildung 6.21 dargestellt. Die Standardabweichung der Amplitudendifferenzen über alle Amplituden beträgt 0.15 mm. Die größten Abweichungen treten mit 1.1 mm bei der jährlichen Amplitude mit der Frequenznummer 18 und mit 1.2 mm bei einer Periode von 34.85 Tagen ($2D - l - l'$) mit der Frequenznummer 189 auf. Die Abweichungen bei den Perioden von 15.39 Tagen ($2D - l'$, Frequenznummer 427) und 14.77 Tagen ($2D$, Frequenznummer 446) sind mit 0.5 mm etwa halb so groß. Die Amplitudenunterschiede in der jährlichen und $2D - l - l'$ Periode, die sich um den Faktor 8 vom Hintergrundrauschen abheben, deuten auf eine sichere Bestimmung des mit dem 3.5-fachen des realistischen Fehlers eingeführten Parameters α_1 hin. Im Differenzspektrum der ungewichteten Residuen, hier nicht dargestellt, zeigt sich eine Erhöhung der Amplitude mit einer Periode von 15.39 Tagen ($2D - l'$), 31.82 Tagen ($2D - l$) und dem jährlichen Signal. Darüber hinaus wird jedoch die Amplitude der Periode von 25.62 Tage ($l + l'$) um 1.3 mm reduziert. Das aktuelle Modell mit α_1 -Verletzung passt in genau dieser Frequenz besser zu den Beobachtungen und könnte ein Hinweis auf noch unmodellierte Effekte sein. Somit liegt der angegebene realistische Fehler in einem plausiblen Bereich und wird auch für den Parameter α_2 angenommen. Beide Parameter zeigen im Rahmen ihrer realistischen Fehler keine Abweichung von der Einstein'schen Gravitationstheorie.

7 Ergebnisse der Simulationen

In diesem Kapitel wird der Effekt von zukünftigen LLR-Messungen auf die geschätzten Genauigkeiten der Reflektorkoordinaten als Realisierung des SRS, der Gesamtmasse des Erde-Mond-Systems GM_{E+M} , dem Kern-Kopplungsparameter K_v/C_M der CMB und der beiden relativistischen Parameter \dot{G}/G_0 und $\Delta(m_g/m_i)_{EM}$ untersucht. Basierend auf der Standardlösung aus Kapitel 5 wurden LLR-Daten für den Zeitraum von 2015 bis 2030 erstellt. Von den bisherigen Observatorien wurden Beobachtungen von OCA und APOLLO fortgeführt. Auf der südlichen Hemisphäre wurden 2 neue LLR-Observatorien hinzugefügt, die im Aufbau befindliche Station Hartebeesthoek (HARL) in Südafrika und LLR-Messungen an der bisherigen SLR-Station Mt. Stromlo (STL) in Australien. Neben den 5 vorhandenen Retroreflektoren auf dem Mond wurden Messungen zu 3 weiteren Einzelprisma-Reflektoren erstellt. Die Position der neu simulierten Stationen und Reflektoren ist in Abbildung 7.1 dargestellt. Die Auswertung der simulierten Daten erfolgt zusammen mit den vorhandenen LLR-Daten. Es wurden in dieser Arbeit vier Szenarien berechnet, die im Folgenden beschrieben sind:

1. Simulation des fortgeführten „Ist-Zustandes“: Es wurden von 2015 bis 2030 Daten der Station APOLLO und OCA zu den bisher auf dem Mond vorhandenen Reflektoren A11, A14, A15, L1 und L2 simuliert. Die Fortführung der LLR-Messungen an den beiden Stationen wird hier als Minimalkonfiguration bis 2030 angesehen. Die NP-Rate wurde mit rund 700 NP pro Jahr für beide Stationen zusammen angenommen und liegt in der Größenordnung der Jahre 2012 bis 2014. Die simulierten Laufzeitmessungen beider Stationen wurden mit zusätzlichem weißen Rauschen versehen. Die Standardabweichung des 2-Wege-Rauschens für OCA beträgt 1.7 cm für Messungen zu A15 und 3.4 cm zu den anderen Reflektoren. Für APOLLO wurde eine Standardabweichung von 1.4 cm bei A15 und 1.9 cm bei den anderen Reflektoren verwendet. Damit kann die Größenordnung der gegenwärtigen Residuen von beiden Stationen seit 2010 reproduziert und in die Zukunft übertragen werden (Abbildung 7.2). In Abbildung 7.3 sind die relativen Änderungen in den geschätzten Genauigkeiten der Parameter als Faktor $\sigma_{\text{simuliert}}/\sigma_{\text{Standard}}$ bezüglich der Genauigkeit aus der Standardlösung dargestellt.

Für die simulierten Genauigkeiten der NP ist bei den dargestellten Newton'schen Parametern (Abbildung 7.3a) eine Genauigkeitssteigerung um den Faktor 2 nach 8 Jahren zu erwarten.

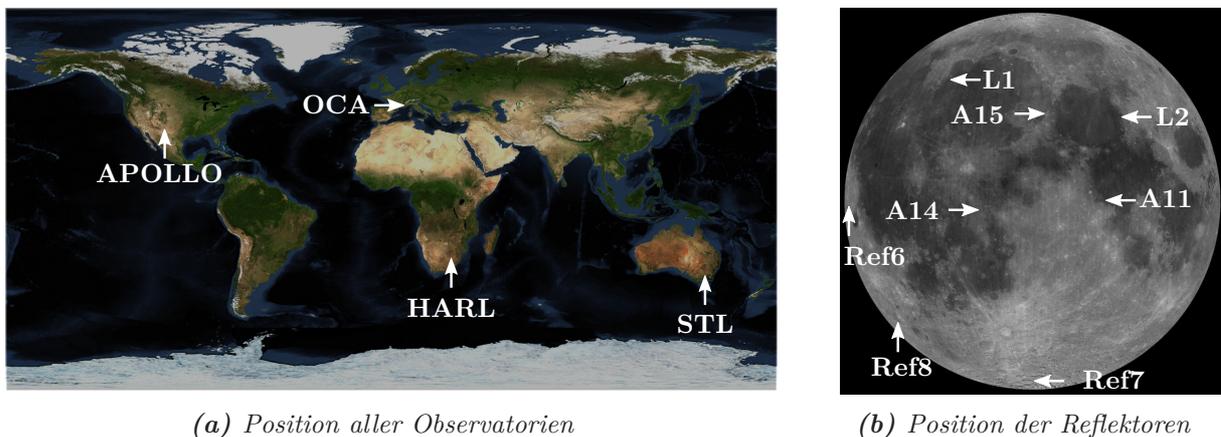


Abb. 7.1: Positionen der LLR-Observatorien und -Reflektoren zur Simulation von künftigen LLR-Daten.

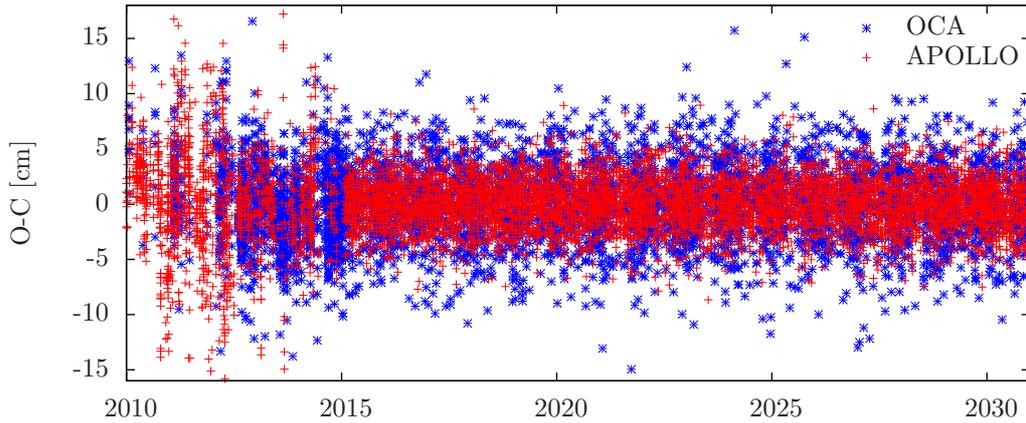
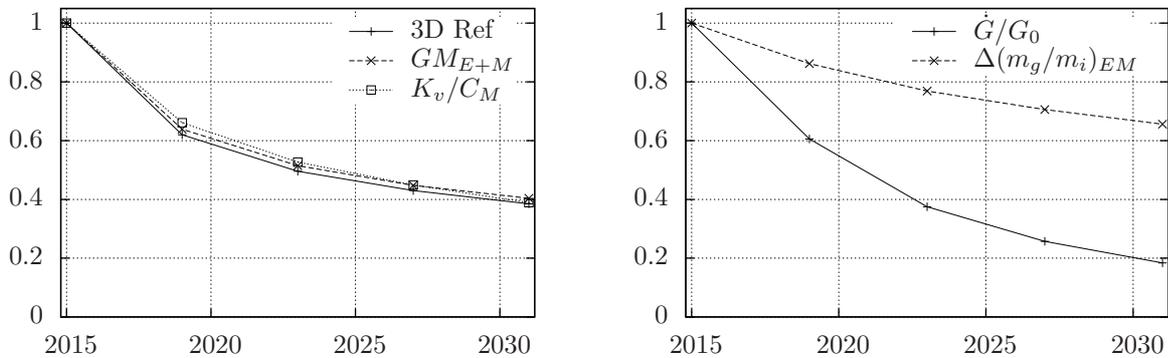


Abb. 7.2: 2-Wege-Residuen (observed-computed O-C) der APOLLO- und OCA-Daten zu den 5 vorhandenen Reflektoren basierend auf gemessenen Daten bis 2015 und simulierten Daten ab 2015.

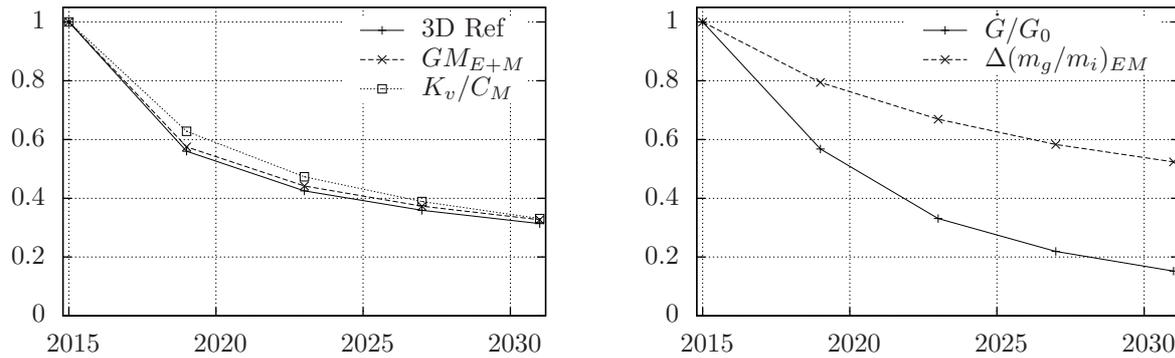


(a) 3D-Koordinatengenauigkeit der Reflektoren, Gesamtmasse des Erde-Mond-Systems und Kern-Kopplungsparameter. (b) Relativistische Parameter \dot{G}/G_0 und $\Delta(m_g/m_i)_{EM}$.

Abb. 7.3: Relative Änderung der Genauigkeiten bezogen auf die Standardlösung mit Daten aus Kapitel 3 mit den Stationen APOLLO und OCA und den Reflektoren A11, A14, A15, L1 und L2.

Bis zum Ende des Simulationszeitraumes wird eine Steigerung um den Faktor 2.5 erreicht. Die Genauigkeit der zeitlichen Variation der Gravitationskonstanten kann nach 6 Jahren um den Faktor 2 und nach 15 Jahren um den Faktor 5 gesteigert werden. Der Test des Äquivalenzprinzips profitiert nicht im gleichen Maße wie \dot{G}/G_0 von der längeren Datenreihe und verbessert sich nur um den Faktor 1.5 bis zum Ende des Simulationszeitraumes.

- Simulation von neuen LLR-Stationen: Die beiden Stationen HARL und STL wurden der Simulation aus Szenario 1 hinzugefügt. Die Gesamtanzahl der simulierten NP pro Jahr erhöht sich damit auf rund 1400. Für beide Stationen wurde die gleiche Standardabweichung für das zugefügte weiße Rauschen verwendet und beträgt 1.7 cm zum Reflektor A15 und 2.1 cm zu den Reflektoren A11, A14, L1 und L2. Die berechneten relativen Änderungen der Genauigkeiten sind in Abbildung 7.4 dargestellt. Im Vergleich zu Szenario 1 werden höhere Genauigkeiten erreicht. Bei den betrachteten Newton'schen Parametern kann die Genauigkeitssteigerung um den Faktor 2.5 bereits nach etwa 10 Jahren erreicht werden, bis zum Ende des Simulationszeitraumes erreicht der Steigerungsfaktor einen Wert von 3.2. \dot{G}/G_0 kann bereits nach 5 Jahren um den Faktor 2 besser bestimmt werden, bis zum Ende des Simulationszeitraumes erreicht die Genauigkeitssteigerung einen Faktor von 6.7. Der Test von $\Delta(m_g/m_i)_{EM}$ kann am En-

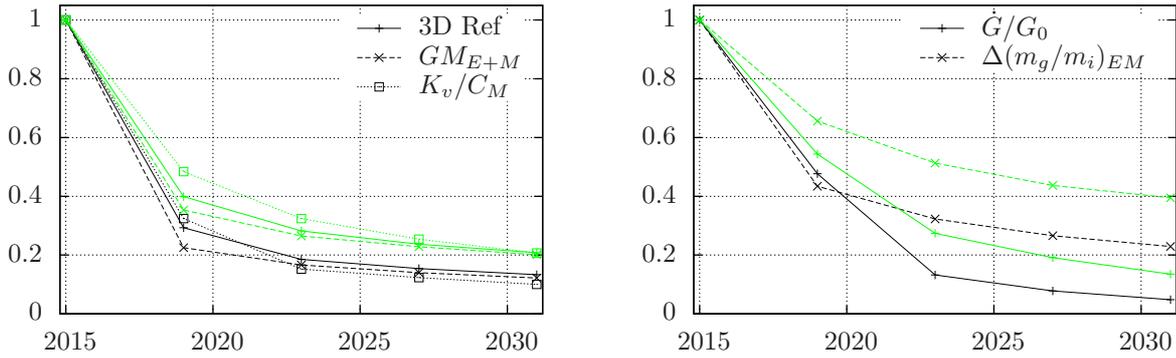


(a) 3D-Koordinatengenauigkeit der Reflektoren, Gesamtmasse des Erde-Mond-Systems und Kern-Kopplungsparameter. (b) Relativistische Parameter \dot{G}/G_0 und $\Delta(m_g/m_i)_{EM}$.

Abb. 7.4: Relative Änderung der Genauigkeiten bezogen auf die Standardlösung mit Daten aus Kapitel 3 mit den Stationen APOLLO, OCA, HARL und STL und den Reflektoren A11, A14, A15, L1 und L2.

de des Simulationszeitraumes mit einer um den Faktor 2 besseren Genauigkeit durchgeführt werden.

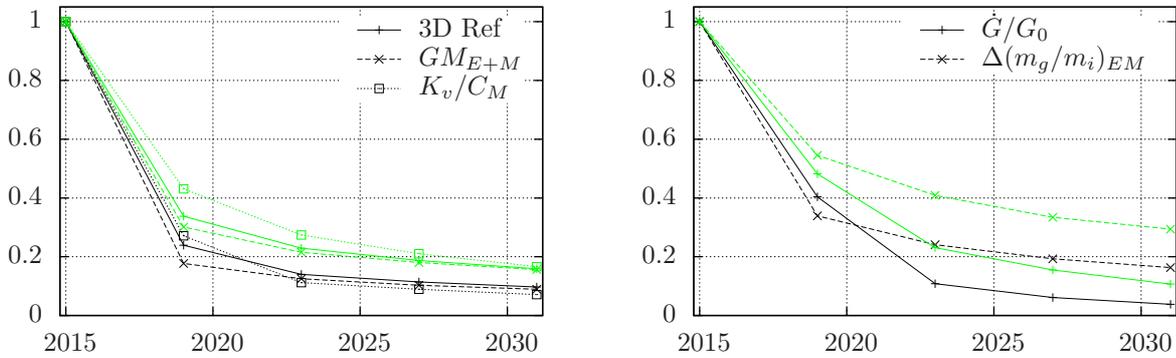
- Simulation von neuen Retroreflektoren: Das Szenario 1 wurde um drei neue Retroreflektoren (Ref6 bis Ref8 in Abbildung 7.1) auf dem Mond erweitert. Die Anzahl der jährlichen NP wurde auf rund 900 erhöht und die simulierten Messungen auf alle Reflektoren gleichmäßig verteilt. Unter der Annahme, dass es sich bei den neuen Reflektoren um Einzelprisma-Reflektoren handelt, wurde das zugefügte 2-Wege-Messrauschen mit einer Standardabweichung von 2 mm bei APOLLO und 5 mm bei den anderen Stationen verwendet. In Abbildung 7.5 sind die relativen Änderungen der berechneten Genauigkeiten dargestellt. In schwarze sind die simulierten zusätzlichen Reflektoren Ref6, Ref7 und Ref8 in der Analyse berücksichtigt. In grün ist das Ergebnis im Fall eines einzelnen zusätzlichen Reflektors (Ref8) zu den bereits bestehenden 5 Reflektoren dargestellt. Die genaueren Messungen zu den neuen Reflektoren führen zu einer größeren Genauigkeitssteigerung der hier betrachteten Parameter, wobei der größte Genauigkeitszuwachs in den ersten 8 Jahren zu erwarten ist. In dieser Zeit haben die sehr genauen und mit hohem Gewicht versehenen Messungen zu den neuen Reflektoren den größten Effekt auf die Ergebnisse. Mit einer länger werdenden Messreihe nimmt der relative Genauigkeitszuwachs pro Zeiteinheit ab, da die Messgenauigkeit der NP konstant bleibt und eine Verbesserung nur von der Verlängerung der Datenreihe bestimmt wird. Bei 3 neuen Reflektoren können die Newton'schen Parametern nach dieser Zeit um dem Faktor 6 genauer bestimmt werden. Bei \dot{G}/G_0 erreicht die Genauigkeitssteigerung nach 8 Jahren einen Faktor von 8 und steigert sich bis auf einen Faktor von 20 am Ende des Simulationszeitraumes. Der Test des Äquivalenzprinzips verbessert sich um den Faktor 3 nach 8 Jahren und kann von weiteren Daten nur in geringem Maße profitieren. Der Genauigkeitszuwachs bei nur einem zusätzlichen Reflektor fällt am Ende des Simulationszeitraumes bei allen Parameters etwa um den Faktor 2 geringer aus.
- Simulation von neuen Stationen und neuen Reflektoren: Diese Variante ist die Kombination der Szenarien 2 und 3. Abbildung 7.6 zeigt die relativen Genauigkeitsänderungen bei Verwendung von allen neuen Reflektoren (schwarzer Graph) und bei Verwendung von nur einem neuen Reflektor (Ref8, grüner Graph). Auch hier zeigt sich, dass der Großteil des Genauigkeitszuwachses nach etwa 8 Jahren erreicht wird. Im Vergleich zu Szenario 3 können die



(a) 3D-Koordinatengenauigkeit der Reflektoren, Gesamtmasse des Erde-Mond-Systems und Kern-Kopplungsparameter.

(b) Relativistische Parameter \dot{G}/G_0 und $\Delta(m_g/m_i)_{EM}$.

Abb. 7.5: Relative Änderung der Genauigkeiten bezogen auf die Standardlösung mit Daten aus Kapitel 3 mit den Stationen APOLLO und OCA und den Reflektoren A11, A14, A15, L1, L2, Ref6, Ref7 und Ref8. Der grüne Graph zeigt das Ergebnis ohne die Daten zu Ref6 und Ref7.



(a) 3D-Koordinatengenauigkeit der Reflektoren, Gesamtmasse des Erde-Mond-Systems und Kern-Kopplungsparameter.

(b) Relativistische Parameter \dot{G}/G_0 und $\Delta(m_g/m_i)_{EM}$.

Abb. 7.6: Relative Änderung der Genauigkeiten bezogen auf die Standardlösung mit Daten aus Kapitel 3 mit den Stationen APOLLO, OCA, HARL und STL und den Reflektoren A11, A14, A15, L1, L2, Ref6, Ref7 und Ref8. Der grüne Graph zeigt das Ergebnis ohne die Daten zu Ref6 und Ref7.

Genauigkeiten nochmals leicht gesteigert werden. Bei den Newton'schen Parametern und allen 3 neuen Reflektoren wird am Ende des Simulationszeitraumes eine Genauigkeitssteigerung um den Faktor 11 erreicht, bei \dot{G}/G_0 ein Faktor von 26 und bei $\Delta(m_g/m_i)_{EM}$ ein Faktor von 6.

Die Ergebnisse aus der kombinierten Auswertung der bisherigen NP und künftigen simulierten NP basieren auf der Annahme, dass das zugrundeliegende Modell der Analyse die Genauigkeit der NP mindestens erreicht. Künftige Erweiterungen des Modells sollten auch bisher nicht berücksichtigte Effekte, wie zum Beispiel den solaren Massenverlust von mehreren 10^{-14} Sonnenmassen pro Jahr [Noerdlinger, 2008] und die synodischen thermische Effekte auf die Position der Reflektoren untersuchen. Besonders das unbekannte thermische Verhalten der Lunochod-Rover stellt eine Fehlerquelle für die Position der Reflektoren L1 und L2 dar, da diese nicht am Boden sondern am oberen Rand der Rover befestigt sind. Die berechneten Genauigkeitssteigerungen der betrachteten Newton'schen Parameter über die Zeit verläuft annähernd identisch zwischen den Parametern. Der Parameter \dot{G}/G_0 profitiert von der höheren Messgenauigkeit und der länger werdenden Datenrei-

he, da mögliche Variationen in G über längere Zeitspannen einen größeren Effekt zeigen. Der Test des Äquivalenzprinzips profitiert hauptsächlich von einer Genauigkeitssteigerung der Messungen innerhalb des synodischen Monats, sodass die zu erwartende Genauigkeitssteigerung geringer als bei \dot{G}/G_0 ausfällt.

Die simulierten LLR-Messungen wurden in dieser Arbeit an allen Stationen als gleichmäßige Zeitreihe ohne jahreszeitliche Schwankungen angenommen, wie sie zum Beispiel an der Station HARL zwischen feuchtem Sommer- und trockenem Winterhalbjahr auftreten. Der Vorteil von zusätzlichen südlichen Stationen im Hinblick auf die gleichmäßigere Messwertabdeckung der Mondbahn und einer besseren globalen Stationsnetzgeometrie, im Vergleich zu aktuell zwei messenden Stationen, bleibt bestehen. Die berechneten Genauigkeitssteigerungen profitieren auch von der insgesamt erhöhten Anzahl an NP pro Jahr, die durch zusätzliche Stationen leichter erreicht werden können.

Den größten positiven Effekt auf die berechneten Genauigkeiten haben die neuen Einzelprisma-Reflektoren, wenn es gelingt, eine Messgenauigkeit im Bereich von wenigen Millimetern für alle Bodenstationen zu diesen Reflektoren zu realisieren. Bereits ein Reflektor in einer randnahen Lage bei mittleren selenozentrischen Breiten kann die Modellierung der Rotationsbewegung stark unterstützen. Für eine bessere Gezeitenmodellierung wäre ein weiterer Reflektor in der Mitte des Mondes hilfreich, da dort die Gezeiteneffekte in radialer Richtung bestmöglich in der Entfernungsmessung enthalten sind. Eine Genauigkeitssteigerung von einer Größenordnung könnte somit innerhalb des nächsten Jahrzehnts erreicht werden.

8 Zusammenfassung und Ausblick

8.1 Zusammenfassung

Die steigende Messgenauigkeit der seit über vier Jahrzehnten durchgeführten LLR-Messungen erfordert eine beständige Weiterentwicklung der Auswerteprogramme. Die modernsten LLR-Stationen erreichen Messgenauigkeiten im Bereich weniger Millimeter. Um in der Auswertung die hohe Messgenauigkeit auszuschöpfen, muss der Effekt der einzelnen Modellbestandteile im Idealfall auf 1 Millimeter oder besser bestimmt werden. Das Ziel dieser Arbeit war die Verbesserung des Analyseprogramms in Richtung der millimetergenauen Auswertung. Dabei stand die mondseitige Modellierung im Vordergrund. Der Schwerpunkt lag auf der Erweiterung des Modells zur Berücksichtigung der gravitativen Effekte der Körper des Sonnensystems auf die Mondephemeride und der Beschreibung der Mondrotation mit einem 2-Schichten-Modell, bestehend aus festem Mantel und flüssigem Kern. In der Datenanalyse lag der Schwerpunkt auf der Bestimmung von Stations- und Reflektorkoordinaten und dem Test von relativistischen Parametern.

Für die Analyse wurde der komplette LLR-Datensatz aktualisiert. Die Normalpunkt-Datensätze von den Arbeitsgruppen am JPL und POLAC sowie die Datensätze des CDDIS und EDC wurden mit dem IFE-Datensatz kombiniert. Nach der Homogenisierung der Lichtlaufzeiten der McDonald-Station erfolgte die Bereinigung von offensichtlichen Fehlern in den NP-Einträgen, identische NP und Ausreißer wurden ebenfalls aussortiert. Bis Anfang 2015 standen insgesamt 20856 NP für die LLR-Analyse in dieser Arbeit zur Verfügung.

Im Zuge der Modellaktualisierung wurde die atmosphärische Laufzeitverzögerung der Laserpulse auf das Modell umgestellt, das auch in der Auswertung der SLR-Messungen verwendet wird. Neben den vier mitgeschätzten Potentialkoeffizienten des Mondschwerefeldes wurden alle weiteren verwendeten Koeffizienten durch ein Modell aus der Analyse der GRAIL-Mission ersetzt. Neu implementiert wurde die Bewegung der Reflektoren aufgrund der Gezeitendeformation der Mondoberfläche und die Schätzung der lunaren Lovezahl h_2 .

Um Fehler durch Vereinfachungen in der Ephemeridenberechnung des Mondes auf ein für die Auswertung nicht-signifikantes Niveau zu reduzieren, wurde die Newton'sche Modellierung der äußeren gravitativen Kräfte auf den Mond als ausgedehnter Körper weiter verfeinert. Das Ziel für die einzelnen Modellbestandteile war eine resultierende Präzision in der Mondephemeride von 0.1 mm über einen Zeitraum von 46 Jahren. Neu berücksichtigt wurden Kräfte zwischen den Planeten Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn mit dem Mondschwerefeld bis Grad und Ordnung 2 sowie die Erweiterung um Kräfte zwischen der Sonne mit dem Grad-3 Mondschwerefeld. Die Modellierung der gravitativen Effekte zwischen Erde und Mond wurde erweitert, sodass jetzt Wechselwirkungen zwischen beliebigen Entwicklungsgraden der beiden Schwerefelder miteinander verwendet werden können. Die geforderte Ephemeridenpräzision wird erreicht, wenn die Effekte bis zum Grad-6 Erdfeld mit dem Mond als Punktmasse, bis zum Grad-6 Mondfeld mit der Erde als Punktmasse und die Effekte der beiden Grad-2 und Grad-3 Schwerefelder untereinander berücksichtigt werden.

Das Erdschwerefeld wurde um säkulare Variationen der zonalen Potentialkoeffizienten erweitert und der Effekt von verschiedenen Modellen auf die Mondephemeride untersucht. Es zeigt sich, dass mit dem linearen Trend des C_{20} -Koeffizienten nach den IERS Conventions 2010 das beste Ergebnis in der LLR-Analyse erreicht wird. Es wird jedoch deutlich, dass eine Präzision der Mondephemeride von 0.1 mm über 46 Jahre aufgrund von Differenzen zwischen den Modellen nicht erreicht

wird. Weiterhin wurde die Grad-2 Gezeitendeformation der Erde erneuert. In Anlehnung an die DE430-Ephemeride des JPL wird ein Modell mit fünf Zeitverzögerungen der Gezeiten der festen Erde verwendet. Zwei Zeitverzögerungen wurden als neue schätzbare Parameter implementiert. Die resultierende Gezeitenbeschleunigung des Mondes kann entweder über Variationen des Grad-2 Schwerefeldes der Erde oder direkt über zusätzliche Beschleunigungen auf den Mond als Punktmasse berechnet werden. Die verbesserte Modellierung der gravitativen Wechselwirkungen führte zu einer Verbesserung des post-fit wrms in den älteren Daten vor 1990 in der Größenordnung von 5 cm. Damit wurde gezeigt, dass die älteren und weniger genauen Messungen jetzt besser zu den neueren und genaueren Messungen passen.

Die Berechnung der Rotationsbewegung des Mondes wurde auf ein 2-Schichten-Modell mit festem Mantel und flüssigem Kern erweitert. Mit der Schätzung einer Kopplungskonstanten zwischen Kern und Mantel als neuem Parameter stehen, neben der Zeitverzögerung der Gezeiteneffekte, zwei Parameter zur Modellierung der Dissipationseffekte im Mondinneren zur Verfügung. Die Berechnung der zeitvariablen Deformation des Trägheitstensors, der in den Bewegungsgleichungen der Rotation genutzt wird, wurde auf das neue Modell angepasst. Die resultierenden Änderungen in den Grad-2 Potentialkoeffizienten wurden dem Modell hinzugefügt und fließen in die Berechnung der gravitativen Wechselwirkung mit den anderen Körpern des Sonnensystems auf die Mondtranslation und Mondrotation ein. Die verfeinerte Modellierung der Mondrotation führte vor allem bei den genaueren Daten ab 1985 zu einer Verbesserung des post-fit wrms in der Größenordnung von 1.5 cm und stellt einen deutlichen Hinweis auf die Existenz eines flüssigen Kerns oder einer flüssigen Schale um einen inneren, festen Kern dar.

Der Einfluss von neuen Observatorien und millimetergenauen Messungen zu künftigen Einzelprisma-Reflektoren auf die geschätzten Parameter wurde in einer Simulation untersucht. Insbesondere durch hochgenaue Messungen zu weiteren neuartigen Reflektoren könnte eine Genauigkeitssteigerung der Reflektorkoordinaten um einen Faktor 6 und bei dem relativistischen Parameter \dot{G}/G_0 um einen Faktor 8 in der ersten Messdekade erreicht werden.

Die Modellierung der LLR-Messungen konnte mit dieser Arbeit deutlich verbessert werden. Die Residuen nach der Ausgleichung wurden über den gesamten Messzeitraum reduziert. Im Vergleich zum Vorgängermodell wurde der jährlich gemittelte 1-Weg wrms um 30 % bis 1984 reduziert und erreicht Werte zwischen 15 cm und 20 cm. Bis 1987 reduziert sich der wrms um mehr als 50 % auf 5 cm. Zwischen 1993 und 2005 wird ein Niveau von 2.5 cm bis 4 cm erreicht und ab dem Beginn der APOLLO-Messungen 2006 beträgt der jährliche wrms rund 2 cm. Das stellt eine Verbesserung von etwa 30 % gegenüber dem vorherigen Modell dar.

Die verbesserte Modellierung führte ebenfalls zu einer genaueren Bestimmung der geschätzten Parameter. Die 3D-Differenzen der Stationskoordinaten zur ITRF-Referenzlösung wurden nach einer Ähnlichkeitstransformation um den Faktor 4 reduziert und erreichen einen Wert im Bereich von 3 cm. Der Vergleich der Reflektorkoordinaten zur DE430-Lösung des JPL zeigt nach einer Ähnlichkeitstransformation 3D-Differenzen in der Größenordnung von 7 cm und verdeutlicht die gute Übereinstimmung mit dem Ergebnis eines unabhängigen LLR-Analysezentrums.

Der Test der Einstein'schen Gravitationstheorie kann durch die Schätzung verschiedener Testgrößen erfolgen. In dieser Arbeit wurde eine zeitliche Variation der Gravitationskonstanten, eine mögliche Verletzung des Äquivalenzprinzips in Richtung Sonne und galaktischem Zentrum, eine abstandsabhängige Variation der Gravitationswirkung sowie die geodätische Präzession und die PPN-Parameter β , γ , α_1 und α_2 untersucht. Im Rahmen der Auswertegenauigkeit wurden in allen Tests keine Abweichungen von der Einstein'schen Gravitationstheorie festgestellt. Die Genauigkeiten der geschätzten relativistischen Größen konnten in dieser Arbeit erhöht werden. Als Beispiel seien das Ergebnis für die zeitlichen Variation der Gravitationskonstanten mit $\dot{G}/G_0 = (7 \pm 8) \times 10^{-14} \text{ a}^{-1}$ und für die möglichen Verletzung des Äquivalenzprinzips mit $\Delta(m_g/m_i)_{EM} = (-3 \pm 5) \times 10^{-14}$ genannt.

8.2 Ausblick

Die Analyse der Residuen zeigt, dass mit dieser Arbeit das Genauigkeitsniveau der LLR-Auswertung am IfE um etwa 30 % verbessert wurde und ein wichtiger Schritt in Richtung der millimetergenauen Auswertung erfolgte. Der jährliche wrms der theoretisch mit Millimetergenauigkeit messenden APOLLO-Station beträgt in dieser Arbeit rund 2 cm, eine weitere Verbesserung des Modells ist entsprechend notwendig.

Auf der Seite der Beobachtungen sollten mögliche Korrelationen zwischen den Normalpunkten, zum Beispiel in einer Nacht oder während einer bestimmten Messdauer und deren Effekte auf die Genauigkeiten der zu bestimmenden Parameter untersucht werden. Mit steigender Messgenauigkeit könnte es nötig werden, aus SLR-Messungen die sogenannten Geozentrumsvariationen als zusätzliche Korrekturen an den Stationskoordinaten anzubringen.

Um eine Präzision der Mondephemeride von unter einem Millimeter über einen Zeitraum von mehreren Jahrzehnten zu erreichen, ist zu untersuchen, ob die Verwendung einer Zeitreihe für niedere zonale Potentialkoeffizienten der Erde eine bessere LLR-Lösung zur Folge hat. Die Langzeitentwicklung der Mondephemeride kann durch verfeinerte Modelle der Gezeitenbeschleunigung sowie der gravitativen Effekte der Asteroiden weiter verbessert werden.

Auf der Seite des Mondes zeigen die LLR-Residuen, dass vor allem in der Librationsbewegung der Länge Verbesserungsbedarf bei der Modellierung der Mondrotation besteht. In einem ersten Schritt könnte die Librationsbewegung um empirische Korrekturen verbessert werden, die verbleibende periodische Schwankungen parametrisieren. Eine der Ursachen für die Librationsabweichungen liegt möglicherweise in der unzureichenden Modellierung der Dissipationseffekte. Für die Realisierung einer millimetergenauen Auswertung sind weitere Untersuchungen auf diesem Gebiet nötig.

Ein weiteres Untersuchungsgebiet ist die Verknüpfung von LLR mit VLBI-Beobachtungen des Mondes. Eine Kombination beider Techniken könnte eine direkte Verknüpfung des dynamischen Ephemeridensystems mit dem kinematischen ICRS ermöglichen und die Konsistenz der Referenzsysteme im Erde-Mond-System erhöhen. Die Schätzung von langperiodischen Nutationskoeffizienten und ΔUT1 -Korrekturen mit beiden Techniken kann die Grundlage für eine gemeinsame Auswertung und gegenseitige Validierung sein. Weiterhin könnte die genaue Beobachtung der Tangentialbewegung der Mondbahn mit VLBI und die genaue Beobachtung der radialen Komponente mit LLR eine Verbesserung der Modellierung der Mondephemeride und der damit verbundenen Parameter zur Folge haben.

Durch die geringe Neigung des Mondäquators zur Ekliptik sind die Startwerte der Mondrotation und der Lage des Mondäquators im Ekliptiksystem in der Ephemeridenrechnung hoch korreliert. Der Übergang zu einer Berechnung bezüglich des ICRS könnte die Korrelationen verringern und sollte in Verbindung mit den Auswirkungen auf andere geschätzte Parameter in einer künftigen Studie untersucht werden. In der Ephemeridenberechnung wäre eine gemeinsame Auswertung mit den Beobachtungen zu den anderen Körpern des Sonnensystem sinnvoll. Dies hätte den Vorteil, dass eine konsistente Bestimmung von nicht oder nur schlecht mit LLR schätzbaren Größen, wie zum Beispiel Startwerte der Position und Geschwindigkeit der Erde, ermöglicht werden.

In zu Einsteins Gravitationstheorie alternativen Theorien werden häufig Abweichungen von $\dot{G}/G_0 = 0$ oder Verletzungen des Äquivalenzprinzips erwartet. Die Untersuchung beider Größen zählt zu den wichtigsten Ergebnissen aus LLR-Daten. Alle relativistischen Tests sollten auf der Basis weiterer Beobachtungen und in Kombination mit zusätzlichen Verfahren, zum Beispiel VLBI, voran getrieben und verbessert werden.

A Anhang

A.1 Rotationsmatrizen

Die in dieser Arbeit und im Programm LUNAR verwendeten Rotationsmatrizen \mathbf{R} sind für einen beliebigen Winkel α um mitgedrehte Achsen x , y und z definiert als

$$\mathbf{R}_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1a})$$

$$\mathbf{R}_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1b})$$

$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1c})$$

A.2 A-priori Stationskoordinaten, -geschwindigkeiten und local ties

Die folgenden 3 Tabellen sind von [Biskupek \[2015\]](#) übernommen.

Tab. A.1: A-priori Koordinaten der Systemreferenzpunkte der LLR-Stationen im ITRF2008. Die Koordinaten der APOLLO-Station liegen bisher nicht im ITRF vor und basieren auf Angaben von T. Murphy (persönliche Kommunikation, 2008).

	Kennung		Koordinaten		
	DOMES	CODE	x [m]	y [m]	z [m]
McDonald	40442S002	7206	-1330781.412	-5328755.587	3235697.645
MLRS1	40442S001	7086	-1330121.097	-5328532.278	3236146.688
MLRS2	40442S006	7080	-1330021.479	-5328403.329	3236481.671
LURE, Sender	40445S005	7210	-5466007.121	-2404427.445	2242188.861
WLRS	14201S018	8834	4075576.807	931785.510	4801583.598
OCA	10002S002	7845	4581692.140	556196.084	4389355.112
APOLLO	49447S001	7045	-1463998.892	-5166632.765	3435012.988
MLRO	12734S008	7941	4641978.804	1393067.533	4133249.476

Tab. A.2: Local ties der McDonald- und zwischen Sender und Empfänger der LURE-Station. Kennungen mit S beziehen sich auf den Systemreferenzpunkt, Kennungen mit M auf ein Exzentrum.

DOMES Kennung		local tie		
von	nach	Δx [m]	Δy [m]	Δz [m]
40442M006	40442S001	-99.9727	-130.4155	-334.1173
40442M006	40442S002	-760.3057	-353.7285	-783.1293
40442M006	40442S006	-0.3730	-1.4710	0.8970
40445S005	LURE Empfänger	6.7708	2.9821	18.1782
40445M001	40445S005	-0.4830	-0.2120	1.0030

Tab. A.3: A-priori Stationsgeschwindigkeiten im ITRF2008. Für die 3 McDonald-Stationen wird die Geschwindigkeit von MLRS2 gemeinsam verwendet. Für die APOLLO-Station wird die Geschwindigkeit der nächstliegenden GPS-Station verwendet.

	\dot{x} [m/a]	\dot{y} [m/a]	\dot{z} [m/a]
MLRS2	-0.0128	0.0004	-0.0051
LURE	-0.0127	0.0620	0.0320
WLRS	-0.0154	0.0172	0.0112
OCA	-0.0142	0.0188	0.0116
APOLLO	-0.0141	-0.0015	-0.0064
MLRO	-0.0181	0.0193	0.0147

A.3 Potentialkoeffizienten des Mondschwerefeldes

Folgende Potentialkoeffizienten der GRAIL-Lösung werden in der Ephemeridenrechnung verwendet [Folkner u. a., 2014]. Mit LLR geschätzte Koeffizienten sind mit „geschätzt“ gekennzeichnet und befinden sich in Tabelle A.9. Der C_{20} -Wert bezieht sich auf das tide-free-System.

Tab. A.4: Verwendete unnormierte Potentialkoeffizienten vom Grad l und Ordnung m .

l	m	C_{lm}	S_{lm}
2	0	$-2.0321568464952570 \times 10^{-4}$	0
2	1	0	0
2	2	geschätzt	0
3	0	$-8.459702697459457 \times 10^{-6}$	0
3	1	$2.848074119559286 \times 10^{-5}$	$5.891555155531864 \times 10^{-6}$
3	2	geschätzt	geschätzt
3	3	geschätzt	$-2.474271437980576 \times 10^{-7}$
4	0	$9.704413836570000 \times 10^{-6}$	0
4	1	$-5.704869731973321 \times 10^{-6}$	$1.578920278924572 \times 10^{-6}$
4	2	$-1.591227179297743 \times 10^{-6}$	$-1.515391579673172 \times 10^{-6}$
4	3	$-8.067888159677821 \times 10^{-8}$	$-8.034926662743107 \times 10^{-7}$
4	4	$-1.269215861221604 \times 10^{-7}$	$8.296425775407522 \times 10^{-8}$
5	0	$-7.422160838405289 \times 10^{-7}$	0
5	1	$-8.662976930898356 \times 10^{-7}$	$-3.527228939324382 \times 10^{-6}$
5	2	$7.119953796735333 \times 10^{-7}$	$1.710788667343038 \times 10^{-7}$
5	3	$1.539975042490452 \times 10^{-8}$	$2.873625761633434 \times 10^{-7}$
5	4	$2.144470431921845 \times 10^{-8}$	$5.265211072014680 \times 10^{-10}$
5	5	$7.659615388400614 \times 10^{-9}$	$-6.782403547399533 \times 10^{-9}$
6	0	$1.376753135096990 \times 10^{-5}$	0
6	1	$1.202436360154592 \times 10^{-6}$	$-2.045350714125222 \times 10^{-6}$
6	2	$-5.470389732415685 \times 10^{-7}$	$-2.696683435357427 \times 10^{-7}$
6	3	$-6.878561275729201 \times 10^{-8}$	$-7.106374529591578 \times 10^{-8}$
6	4	$1.291558040292516 \times 10^{-9}$	$-1.536161696663230 \times 10^{-8}$
6	5	$1.173769878446050 \times 10^{-9}$	$-8.346507319514252 \times 10^{-9}$
6	6	$-1.091339517888154 \times 10^{-9}$	$1.684421370263292 \times 10^{-9}$

A.4 Ergebnisübersicht der geschätzten Parameter

Im Folgenden sind die Ergebnisse aller geschätzten Parameter für die Standardlösung der regulären LLR-Auswertung zusammengestellt. Die Stationsgeschwindigkeiten der Observatorien LURE und MLRO wurden unter der Verwendung eines Constraints von 1 mm pro Jahr mitgeschätzt (Kapitel 5.3). Bei den angegebenen Genauigkeiten handelt es sich um formale 1σ -Genauigkeiten aus der Ausgleichung.

Tab. A.5: Übersicht über die geschätzten Stationskoordinaten \mathbf{x}_{Sta} und -geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{x}}_{Sta}$ im erdfesten System. Für die Station LURE sind die Koordinaten des Senders angegeben. Die Stationsgeschwindigkeit von MLRS2 gilt für alle McDonald-Stationen. Die Station WLRS wird auf den ITRF-Koordinaten und -geschwindigkeiten fixiert (Tabelle A.1).

		x [m] / \dot{x} [m/a]	y [m] / \dot{y} [m/a]	z [m] / \dot{z} [m/a]
McDonald	\mathbf{x}_{Sta}	-1330781.374 ± 0.0029	-5328755.616 ± 0.0022	3235697.642 ± 0.0063
MLRS1	\mathbf{x}_{Sta}	-1330121.060 ± 0.0029	-5328532.308 ± 0.0022	3236146.685 ± 0.0063
MLRS2	\mathbf{x}_{Sta}	-1330021.442 ± 0.0029	-5328403.359 ± 0.0022	3236481.668 ± 0.0063
LURE	\mathbf{x}_{Sta}	-5466007.162 ± 0.0143	-2404427.480 ± 0.0148	2242188.818 ± 0.0183
OCA	\mathbf{x}_{Sta}	4581692.147 ± 0.0015	556196.115 ± 0.0009	4389355.105 ± 0.0046
APOLLO	\mathbf{x}_{Sta}	-1463998.894 ± 0.0019	-5166632.781 ± 0.0018	3435012.920 ± 0.0094
MLRO	\mathbf{x}_{Sta}	4641978.795 ± 0.0187	1393067.604 ± 0.0221	4133249.428 ± 0.0274
MLRS2	$\dot{\mathbf{x}}_{Sta}$	-0.0086 ± 0.0003	0.0004 ± 0.0003	-0.0013 ± 0.0006
LURE	$\dot{\mathbf{x}}_{Sta}$	-0.0123 ± 0.0011	0.0608 ± 0.0011	0.0300 ± 0.0012
OCA	$\dot{\mathbf{x}}_{Sta}$	-0.0141 ± 0.0001	0.0193 ± 0.0001	0.0114 ± 0.0005
APOLLO	$\dot{\mathbf{x}}_{Sta}$	-0.0113 ± 0.0002	0.0000 ± 0.0001	-0.0053 ± 0.0009
MLRO	$\dot{\mathbf{x}}_{Sta}$	-0.0179 ± 0.0011	0.0193 ± 0.0012	0.0147 ± 0.0012

Tab. A.6: Übersicht über die geschätzten Reflektorkoordinaten im HAS des Mondes

	x [m]	y [m]	z [m]
A11	1591966.255 ± 0.046	690699.856 ± 0.031	21003.516 ± 0.013
A14	1652689.446 ± 0.046	-520996.920 ± 0.031	-109730.668 ± 0.013
A15	1554678.167 ± 0.045	98096.091 ± 0.029	765004.897 ± 0.024
L1	1114292.412 ± 0.044	-781297.959 ± 0.025	1076058.404 ± 0.029
L2	1339363.119 ± 0.045	801872.419 ± 0.028	756358.360 ± 0.025

Tab. A.7: Übersicht über die geschätzten Startwerte der Mondephemeride zum Zeitpunkt $\text{JD}_{\text{LLR}} = 583.5$ (TDB). Die Mondposition und -geschwindigkeit sind bezüglich der inertialen Achsen des Ekliptiksystems gegeben.

Parameter	Wert	
x_{EM}	-322941585.956 ± 0.083	geozentrische Mondposition \mathbf{x}_{EM} [m]
y_{EM}	244546741.600 ± 0.106	
z_{EM}	13251725.843 ± 0.038	
\dot{x}_{EM}	$-573.773166301 \pm 2.66 \times 10^{-7}$	geozentrische Mondgeschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}_{EM}$ [m/s]
\dot{y}_{EM}	$-776.556903173 \pm 2.05 \times 10^{-7}$	
\dot{z}_{EM}	$-79.924223474 \pm 0.50 \times 10^{-7}$	
ω_{mx}	$(108990.63 \pm 15.70) \times 10^{-15}$	Mantelrotationsvektor $\boldsymbol{\omega}_m$ im HAS [rad/s]
ω_{my}	$(-97658.13 \pm 8.67) \times 10^{-15}$	
ω_{mz}	$(2661983496.70 \pm 0.33) \times 10^{-15}$	
ω_{cx}	$(2280.9 \pm 3.5) \times 10^{-11}$	Kernrotationsvektor $\boldsymbol{\omega}_c$ im Mantelsystem [rad/s]
ω_{cy}	$(-7389.1 \pm 3.6) \times 10^{-11}$	
ω_{cz}	$(264582.1 \pm 51.0) \times 10^{-11}$	
ψ	$2.8975573991 \pm 261.9 \times 10^{-9}$	Manteleulerwinkel [rad]
ϑ	$0.0270847328 \pm 6.4 \times 10^{-9}$	
φ	$2.7867890133 \pm 261.1 \times 10^{-9}$	

Tab. A.8: Übersicht über die geschätzten stationsabhängigen 1-Weg Laufzeitkorrekturen

Station	Zeitraum [JD _{LLR}]	Laufzeitkorrektur [cm]	
McDonald	690.0 – 6250.0	1818.82 ± 0.61	gesamte Datenreihe
	690.0 – 1110.5	20.10 ± 6.47	aus Residuen
	1428.5 – 1434.5	-31.03 ± 9.83	aus Residuen
	2277.5 – 2336.5	47.17 ± 2.59	aus Residuen
	2690.9 – 2838.6	-27.18 ± 2.14	aus Residuen
MLRS1	5669.5 – 5716.5	-25.79 ± 8.11	aus Residuen
	5548.5 – 6000.5	10.56 ± 2.95	aus Residuen
LURE	6120.5 – 6350.5	-7.42 ± 1.45	aus Residuen
	6522.5 – 7007.5	-6.64 ± 0.79	Hardwareänderung
	7108.5 – 7210.5	-8.65 ± 1.08	Hardwareänderung
	7761.5 – 7762.5	9.80 ± 1.60	aus Residuen
WLRS	7892.5 – 8622.5	-7.58 ± 1.11	aus Residuen
	9400.5 – 10150.5	-26.97 ± 9.11	gesamte Datenreihe
OCA	5750.5 – 7000.5	4.13 ± 0.92	Hardwareänderung
	8500.5 – 8920.5	2.67 ± 0.22	aus Residuen
	9160.5 – 9850.5	-4.11 ± 0.21	aus Residuen
	9850.5 – 10427.5	-5.42 ± 0.18	aus Residuen
	10427.5 – 10988.5	-9.84 ± 0.19	aus Residuen
APOLLO	14440.5 – 14650.5	2.87 ± 0.06	aus Residuen
	15501.0 – 16024.8	3.97 ± 0.10	Hardwareänderungen
	16145.5 – 16518.5	-4.39 ± 0.07	aus Residuen

Tab. A.9: Übersicht über die geschätzten Parameter für Mond und Erde als ausgedehnte Körper

Parameter	Wert	
GM_{E+M}	403503.23525 ± 0.00013	Gesamtmasse Erde-Mond-System [km^3/s^2]
C_{22}^{tf}	$(2.2373477 \pm 0.0000045) \times 10^{-5}$	lunare Potentialkoeffizienten
C_{32}	$(4.842937 \pm 0.000086) \times 10^{-6}$	
C_{33}	$(1.71625 \pm 0.00097) \times 10^{-6}$	
S_{32}	$(1.68199 \pm 0.00016) \times 10^{-6}$	
β_M^{tf}	$(6.3111700 \pm 0.0000010) \times 10^{-4}$	dynamische Abplattung des Mondes
K_v/C_M	$(1.242 \pm 0.018) \times 10^{-8}$	Kopplungsparameter der CMB [1/d]
τ_M	8015 ± 81	Verzögerung der lunaren Festkörpergezeiten [s]
h_2	0.05230 ± 0.00064	lunare Lovezahl
τ'_{21}	574.6 ± 3.5	Verzögerung der Erdgezeiten [s]
τ'_{22}	226.0 ± 0.3	

Tab. A.10: Übersicht über die geschätzten relativistischen Parameter. Angegeben sind die in dieser Arbeit ermittelten realistischen Fehler. δg_{gal} wurde einmal mit analytischen Ableitungen (a) und einmal mit numerischen Ableitungen (n) geschätzt.

Parameter	Wert	
\dot{G}/G_0	$(7.1 \pm 7.6) \times 10^{-14}$	getrennte Schätzung, in [a^{-1}] und [a^{-2}]
\ddot{G}/G_0	$(1.6 \pm 2.0) \times 10^{-15}$	
\dot{G}/G_0	$(0.8 \pm 1.1) \times 10^{-13}$	gemeinsame Schätzung, in [a^{-1}] und [a^{-2}]
\ddot{G}/G_0	$(-0.3 \pm 2.4) \times 10^{-15}$	
$\Delta(m_g/m_i)_{EM}$	$(-3.0 \pm 5.0) \times 10^{-14}$	LLR-Äquivalenzprinziptest
$\Delta(m_g/m_i)_{EMSEP}$	$(-1.3 \pm 1.5) \times 10^{-13}$	Abgeleiteter Wert für das SEP
η	$(-0.2 \pm 1.1) \times 10^{-4}$	Nordtvedt-Parameter
δg_{gal} (a)	$(1.2 \pm 1.4) \times 10^{-16}$	Differentielle Beschleunigung zum galaktischen Zentrum [m/s]
δg_{gal} (n)	$(-0.8 \pm 1.1) \times 10^{-16}$	
α_{yuk}	$(-3.7 \pm 4.5) \times 10^{-12}$	Yukawa-Kopplungskonstante
h	$(-5.6 \pm 8.5) \times 10^{-4}$	Faktor für zusätzliche geodätische Präzession
$\gamma - 1$	$(-1.2 \pm 1.2) \times 10^{-4}$	weitere PPN-Parameter
$\beta - 1$	$(-8.7 \pm 9.0) \times 10^{-5}$	
$\beta - 1$ (aus η)	$(-4.5 \pm 5.6) \times 10^{-5}$	
α_1	$(-1.1 \pm 1.5) \times 10^{-5}$	
α_2	$(-6.0 \pm 9.0) \times 10^{-6}$	

Abkürzungsverzeichnis

A11	Apollo 11-Reflektor
A14	Apollo 14-Reflektor
A15	Apollo 15-Reflektor
APOLLO	Apache Point Observatory Lunar Laser-ranging Operation, USA
BCRS	Barycentric Celestial Reference System - Baryzentrisches himmelfestes Referenzsystem
CIO	Celestial Intermediate Origin - Ursprung der x-Achse im intermediären himmelfesten Referenzsystem
CIP	Celestial Intermediate Pole - Intermediärer Himmelspol
CMB	Core-Mantle-Boundary - Kern-Mantel-Grenze
CDDIS	Crustal Dynamics Data Information System
DTRF	Realisierung des ITRS vom Deutschen Geodätischen Forschungsinstitut - Technische Universität München
EDC	EUROLAS Data Center
EGM	Earth Gravitational Model
EIH	Einstein-Infeld-Hoffmann
GCRS	Geocentric Celestial Reference System - Geozentrisches himmelfestes Referenzsystem
GRACE	Gravity Recovery and Climate Experiment
GRAIL	Gravity Recovery and Interior Laboratory
HAS	Hauptachsensystem
HARL	Hartebeesthoek Radio Astronomy Observatory, Südafrika
IAA RAS	Institute of Applied Astronomy of the Russian Academy of Sciences, Russland
IERS	International Earth Rotation and Reference Systems Service - Internationaler Service für Erdrotation und Referenzsysteme
IfE	Institut für Erdmessung, Deutschland
ILRS	International Laser Ranging Service - Internationaler Service für Laserentfernungsmessungen
IMCCE	Institute de Mécanique Céleste et de Calcul des Ephémérides, Frankreich
ITRF	International Terrestrial Reference Frame - Internationaler terrestrischer Referenzrahmen
ITRS	International Terrestrial Reference System - Internationales terrestrisches Referenzsystem
JPL	Jet Propulsion Laboratory, USA
LAGEOS	Laser Geodynamics Satellite
L1	Lunochod 1-Reflektor
L2	Lunochod 2-Reflektor
LLR	Lunar Laser Ranging - Laserentfernungsmessung zum Mond
LRO	Lunar Reconnaissance Orbiter
LURE	Lunar Ranging Experiment, Hawaii, USA
ME	Mean-Earth/Rotation Axis System
MLRO	Matera Laser Ranging Observatory, Italien
MLRS	McDonald Laser Ranging Station, USA

NP	Normalpunkt
OCA	Observatoire de la Côte d'Azur, Frankreich
POLAC	Paris Observatory Lunar Analysis Center, Frankreich
PPN	Parametrisiert post-Newton'sch
PSD	Power-Spectral-Density - Leistungsdichtespektrum
SEP	Strong Equivalence Principle - starkes Äquivalenzprinzip
SLR	Satellite Laser Ranging - Laserentfernungsmessung zu Satelliten
SRF	Selenocentric Reference Frame - Selenozentrischer Referenzrahmen
SRS	Selenocentric Reference System - Selenozentrisches Referenzsystem
STL	Mt. Stromlo Observatory, Australien
TAI	International Atomic Time - Internationale Atomzeit
TCB	Barycentric Coordinate Time - Baryzentrische Koordinatenzeit
TCG	Geocentric Coordinate Time - Geozentrische Koordinatenzeit
TDB	Barycentric Dynamical Time - Baryzentrische Dynamische Zeit
TT	Terrestrial Time - Terrestrische Zeit
UTC	Universal Time Coordinated - Universelle Koordinierte Weltzeit
VLBI	Very Long Baseline Interferometry - Radiointerferometrie auf sehr langen Basislinien
WLRS	Wettzell Laser Ranging System, Deutschland
WEP	Weak Equivalence Principle - schwaches Äquivalenzprinzip

Literaturverzeichnis

- [AtmoMap] *FORTRAN Routine FCUL_a.f.* – URL ftp://tai.bipm.org/iers/convupdt/chapter9/FCUL_A.F. – letzter Aufruf am 24.11.2016
- [AtmoZ] *FORTRAN Routine FCUL_ZD_HPA.f.* – URL ftp://tai.bipm.org/iers/convupdt/chapter9/FCUL_ZD_HPA.F. – letzter Aufruf am 24.11.2016
- [NGA-EGM2008] *National Geospatial-Intelligence Agency - EGM2008.* – URL http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/egm08_wgs84.html. – letzter Aufruf 24.11.2016
- [Adelberger 2001] ADELBERGER, E. G.: New tests of Einstein's equivalence principle and Newton's inverse-square law. In: *Classical and Quantum Gravity* 18 (2001), S. 2397–2405
- [Adelberger u. a. 1990] ADELBERGER, E. G. ; STUBBS, C. W. ; HECKEL, B. R. ; SU, Y. ; SWANSON, H. E. ; SMITH, G. ; GUNDLACH, J. H. ; ROGERS, W. F.: Testing the equivalence principle in the field of the Earth: Particle physics at masses below 1 μeV ? In: *Physical Review D* 42 (1990), S. 3267–3292
- [Altamimi u. a. 2002] ALTAMIMI, Z. ; SILLARD, P. ; BOUCHER, C.: ITRF2000: A new release of the International Terrestrial Reference Frame for earth science applications. In: *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 107 (2002), S. 2214
- [Anderson u. a. 1992] ANDERSON, J. D. ; CAMPBELL, J. K. ; JURGENS, R. F. ; LAU, E. L.: Recent developments in solar-system tests of general relativity. In: SATO, F. (Hrsg.) ; NAKAMURA, T. (Hrsg.): *Marcel Grossmann Meeting on General Relativity*, 1992
- [Angermann u. a. 2004] ANGERMANN, D. ; DREWES, H. ; KRÜGEL, M. ; MEISEL, B. ; GERSTL, M. ; KELM, R. ; MÜLLER, H. ; SEEMÜLLER, W. ; TESMER, V.: ITRS Combination Center at DGFI: a terrestrial reference frame realization 2003. In: *Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe B, Nr. 313* (2004)
- [Archinal u. a. 2011a] ARCHINAL, B. A. ; A'HEARN, M. F. ; BOWELL, E. ; CONRAD, A. ; CONSOLMAGNO, G. J. ; COURTIN, R. ; FUKUSHIMA, T. ; HESTROFFER, D. ; HILTON, J. L. ; KRASINSKY, G. A. ; NEUMANN, G. ; OBERST, J. ; SEIDELMANN, P. K. ; STOOKE, P. ; THOLEN, D. J. ; THOMAS, P. C. ; WILLIAMS, I. P.: Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2009. In: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 109 (2011), S. 101–135
- [Archinal u. a. 2011b] ARCHINAL, B. A. ; A'HEARN, M. F. ; CONRAD, A. ; CONSOLMAGNO, G. J. ; COURTIN, R. ; FUKUSHIMA, T. ; HESTROFFER, D. ; HILTON, J. L. ; KRASINSKY, G. A. ; NEUMANN, G. ; OBERST, J. ; SEIDELMANN, P. K. ; STOOKE, P. ; THOLEN, D. J. ; THOMAS, P. C. ; WILLIAMS, I. P.: Erratum to: Reports of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2006 & 2009. In: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 110 (2011), S. 401–403
- [Ashby u. a. 2007] ASHBY, N. ; BENDER, P. L. ; WAHR, J. M.: Future gravitational physics tests from ranging to the BepiColombo Mercury planetary orbiter. In: *Physical Review D* 75 (2007), Nr. 2, S. 022001
- [Balmino u. a. 1976] BALMINO, G. ; REIGBER, C. ; MOYNOT, B.: The GRIM 2 Earth Gravity Field Model. In: *Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe A, Nr. 86* (1976)
- [Battat u. a. 2007] BATTAT, J. B. R. ; CHANDLER, J. F. ; STUBBS, C. W.: Testing for Lorentz Violation: Constraints on Standard-Model-Extension Parameters via Lunar Laser Ranging. In: *Physical Review Letters* 99 (2007), Nr. 24, S. 241103

- [Bauer 1989] BAUER, R.: *Bestimmung von Parametern des Erde-Mond-Systems*, Technische Universität München, Dissertation, 1989. – Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, Nr. 353
- [Bender u. a. 1973] BENDER, P. L. ; CURRIE, D. G. ; DICKE, R. H. ; ECKHARDT, D. H. ; FALLER, J. E. ; KAULA, W. M. ; MULHOLLAND, J. D. ; PLOTKIN, H. H. ; POULTNEY, S. K. ; SILVERBERG, E. C. ; WILKINSON, D. T. ; WILLIAMS, J. G. ; ALLEY, C. O.: The Lunar Laser Ranging Experiment. In: *Science* 182 (1973), S. 229–238
- [Bendix 1971] BENDIX: Laser Ranging Retro-Reflector (LRRR) Familiarization Manual (Revision A) (ALSEP - MT - 05) / The Bendix Corporation Aerospace Systems Division. URL <http://www.lpi.usra.edu/lunar/ALSEP>, 1971. – Forschungsbericht. letzter Aufruf am 24.11.2016
- [Bergé u. a. 2015] BERGÉ, J. ; TOUBOUL, P. ; RODRIGUES, M. for the MICROSCOPE-Team: Status of MICROSCOPE, a mission to test the Equivalence Principle in space. In: *Journal of Physics Conference Series* 610 (2015), Nr. 1, S. 012009
- [Bertotti u. a. 2003] BERTOTTI, B. ; IESS, L. ; TORTORA, P.: A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft. In: *Nature* 425 (2003), S. 374–376
- [Biancale u. a. 2000] BIANCALE, R. ; BALMINO, G. ; LEMOINE, J.-M. ; MARTY, J.-C. ; MOYNOT, B. ; BARLIER, F. ; EXERTIER, P. ; LAURAIN, O. ; GEGOUT, P. ; SCHWINTZER, P. ; REIGBER, C. ; BODE, A. ; KÖNIG, R. ; MASSMANN, F.-H. ; RAIMONDO, J.-C. ; SCHMIDT, R. ; YUAN ZHU, S.: A new global Earth's gravity field model from satellite orbit perturbations: GRIM5-S1. In: *Geophysical Research Letters* 27 (2000), S. 3611–3614
- [Bills 1995] BILLS, B. G.: Discrepant estimates of moments of inertia of the Moon. In: *Journal of Geophysical Research (Planets)* 100 (1995), S. 26297–26304
- [Biskupek 2015] BISKUPEK, L.: *Bestimmung der Erdrotation mit Lunar Laser Ranging*, Leibniz Universität Hannover, Dissertation, 2015. – Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, Nr. 742
- [Bourgoin u. a. 2015] BOURGOIN, A. ; LE PONCIN-LAFITTE, C. ; BOUQUILLON, S. ; FRANCOU, G. ; ANGININ, M.-C.: A new 4-D dynamical modelling of the Moon orbital and rotational motion developed at POLAC. In: MARTINS, F. (Hrsg.) ; BOISSIER, S. (Hrsg.) ; BUAT, V. (Hrsg.) ; CAMBRÉSY, L. (Hrsg.) ; PETIT, P. (Hrsg.): *SF2A-2015: Proceedings of the Annual meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics*, 2015, S. 111–114
- [Brans und Dicke 1961] BRANS, C. ; DICKE, R. H.: Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation. In: *Physical Review* 124 (1961), S. 925–935
- [Bruinsma u. a. 2010] BRUINSMA, S. ; LEMOINE, J.-M. ; BIANCALE, R. ; VALÈS, N.: CNES/GRGS 10-day gravity field models (release 2) and their evaluation. In: *Advances in Space Research* 45 (2010), S. 587–601
- [Brumberg und Kopejkin 1989a] BRUMBERG, V. A. ; KOPEJKIN, S. M.: Relativistic reference systems and motion of test bodies in the vicinity of the Earth. In: *Nuovo Cimento B Serie* 103 (1989), S. 63–98
- [Brumberg und Kopejkin 1989b] BRUMBERG, V. A. ; KOPEJKIN, S. M.: Relativistic theory of celestial reference frames. In: KOVALEVSKY, J. (Hrsg.) ; MUELLER, I. I. (Hrsg.) ; KOLACZEK, B. (Hrsg.): *Reference Frames* Bd. 154, 1989, S. 115–141
- [Cappallo 1980] CAPPALLO, R. J.: *The Rotation of the Moon*, Massachusetts Institute of Technology, Dissertation, 1980
- [Chapront und Francou 2006] CHAPRONT, J. ; FRANCOU, G.: Lunar Laser Ranging: measurements, analysis, and contribution to the reference systems. In: *IERS Technical Note* 34 (2006), S. 97–116
- [Cheng u. a. 2011] CHENG, M. K. ; RIES, J. C. ; TAPLEY, B. D.: Variations of the Earth's figure axis from satellite laser ranging and GRACE. In: *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 116 (2011), S. 1409

- [Cheng u. a. 1997] CHENG, M. K. ; SHUM, C. K. ; TAPLEY, B. D.: Determination of long-term changes in the Earth's gravity field from satellite laser ranging observations. In: *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 102 (1997), S. 22377
- [Cheng u. a. 2013] CHENG, M. K. ; TAPLEY, B. D. ; RIES, J. C.: Deceleration in the Earth's oblateness. In: *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 118 (2013), S. 740–747
- [Courde 2016] COURDE, C.: *Lunar laser ranging in Infrared*. talk at 20th International Workshop on Laser Ranging, Potsdam, 10.-14.10.2016. 2016
- [Currie u. a. 2013] CURRIE, D. G. ; DELL'AGNELLO, S. ; DELLE MONACHE, G. O. ; BEHR, B. ; WILLIAMS, J. G.: A Lunar Laser Ranging Retroreflector Array for the 21st Century. In: *Nuclear Physics B Proceedings Supplements* 243 (2013), S. 218–228
- [Damour und Polyakov 1994] DAMOUR, T. ; POLYAKOV, A. M.: The string dilation and a least coupling principle. In: *Nuclear Physics B* 423 (1994), S. 532–558
- [Damour u. a. 1991] DAMOUR, T. ; SOFFEL, M. ; XU, C.: General relativistic celestial mechanics. I: Method and definition of reference systems. In: *Physical Review D* 43 (1991), S. 3273–3307
- [Damour u. a. 1992] DAMOUR, T. ; SOFFEL, M. ; XU, C.: General-relativistic celestial mechanics. II. Translational equations of motion. In: *Physical Review D* 45 (1992), S. 1017–1044
- [Damour u. a. 1993] DAMOUR, T. ; SOFFEL, M. ; XU, C.: General-relativistic celestial mechanics. III. Rotational equations of motion. In: *Physical Review D* 47 (1993), S. 3124–3135
- [Damour u. a. 1994] DAMOUR, T. ; SOFFEL, M. ; XU, C.: General-relativistic celestial mechanics. IV. Theory of satellite motion. In: *Physical Review D* 49 (1994), S. 618–635
- [Damour und Taylor 1991] DAMOUR, T. ; TAYLOR, J. H.: On the orbital period change of the binary pulsar PSR 1913 + 16. In: *The Astrophysical Journal* 366 (1991), S. 501–511
- [Damour und Vokrouhlický 1996a] DAMOUR, T. ; VOKROUHLICKÝ, D.: Equivalence principle and the Moon. In: *Physical Review D* 53 (1996), S. 4177–4201
- [Damour und Vokrouhlický 1996b] DAMOUR, T. ; VOKROUHLICKÝ, D.: Testing for gravitationally preferred directions using the lunar orbit. In: *Physical Review D* 53 (1996), S. 6740–6748
- [Davis 1992] DAVIS, R. S.: Equation for the Determination of the Density of Moist Air (1981/91). In: *Metrologia* 29 (1992), Nr. 1, S. 67
- [de Sitter 1916] DE SITTER, W.: On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences. Second paper. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 77 (1916), S. 155–184
- [Dehant u. a. 2012] DEHANT, V. ; OBERST, J. ; NADALINI, R. ; SCHREIBER, U. ; RAMBAUX, N.: Geodesy instrument package on the Moon for improving our knowledge of the Moon and the realization of reference frames. In: *Planetary and Space Science* 68 (2012), Nr. 1, S. 94 – 104
- [Dumberry und Wiczorek 2016] DUMBERRY, M. ; WICZOREK, M. A.: The forced precession of the Moon's inner core. In: *Journal of Geophysical Research (Planets)* 121 (2016), S. 1264–1292
- [Egger 1985] EGGER, D.: *Systemanalyse der Laserentfernungsmessung.*, Technische Universität München, Dissertation, 1985. – Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, Nr. 311
- [Einstein 1916] EINSTEIN, A.: Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. In: *Annalen der Physik* 354 (1916), S. 769–822
- [Einstein u. a. 1938] EINSTEIN, A. ; INFELD, L. ; HOFFMANN, B.: The Gravitational Equations and the Problem of Motion. In: *Annals of Mathematics* 39 (1938), Nr. 1, S. 65–100

- [Eötvös u. a. 1922] EÖTVÖS, R. V. ; PEKÁR, D. ; FEKETE, E.: Beiträge zum Gesetze der Proportionalität von Trägheit und Gravität. In: *Annalen der Physik* 373 (1922), S. 11–66
- [Ferrari u. a. 1980] FERRARI, A. J. ; SINCLAIR, W. S. ; SJOGREN, W. L. ; WILLIAMS, J. G. ; YODER, C. F.: Geophysical parameters of the Earth-Moon system. In: *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 85 (1980), S. 3939–3951
- [Fienga u. a. 2014a] FIENGA, A. ; LASKAR, J. ; EXERTIER, P. ; MANCHE, H. ; GASTINEAU, M.: Tests of General relativity with planetary orbits and Monte Carlo simulations. In: *ArXiv e-prints*, Nr. 1409.4932 (2014)
- [Fienga u. a. 2014b] FIENGA, A. ; MANCHE, H. ; LASKAR, J. ; GASTINEAU, M. ; VERMA, A.: INPOP new release: INPOP13b. In: *ArXiv e-prints*, Nr. 1405.0484 (2014)
- [Fischbach u. a. 1986] FISCHBACH, E. ; SUDARSKY, D. ; SZAFER, A. ; TALMADGE, C. ; ARONSON, S. H.: Reanalysis of the Eotvos experiment. In: *Physical Review Letters* 56 (1986), S. 3–6
- [Folkner u. a. 2014] FOLKNER, W. M. ; WILLIAMS, J. G. ; BOGGS, D. H. ; PARK, R. S. ; KUCHYNKA, P.: The Planetary and Lunar Ephemerides DE430 and DE431. In: *Interplanetary Network Progress Report* 196 (2014), S. 1–81
- [Fukushima 2003] FUKUSHIMA, T.: A New Precession Formula. In: *The Astronomical Journal* 126 (2003), S. 494–534
- [Gamow 1967] GAMOW, G.: Electricity, Gravity, and Cosmology. In: *Physical Review Letters* 19 (1967), S. 759–761
- [Garcia u. a. 2011] GARCIA, R. F. ; GAGNEPAIN-BEYNEIX, J. ; CHEVROT, S. ; LOGNONNÉ, P.: Very preliminary reference Moon model. In: *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 188 (2011), S. 96–113
- [Garcia-Berro u. a. 1995] GARCIA-BERRO, E. ; HERNANZ, M. ; ISERN, J. ; MOCHKOVITCH, R.: The rate of change of the gravitational constant and the cooling of white dwarfs. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 277 (1995), S. 801–810
- [Giacomo 1982] GIACOMO, P.: Equation for the Determination of the Density of Moist Air (1981). In: *Metrologia* 18 (1982), Nr. 1, S. 33
- [Gleixner 1982] GLEIXNER, H.: Gravitationswechselwirkung ausgedehnter Körper. In: *Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe A, Nr. 95* (1982)
- [Gleixner 1986] GLEIXNER, H.: *Ein Beitrag zur Ephemeridenrechnung und Parameterschätzung im Erde-Mond-System*, Technische Universität München, Dissertation, 1986. – Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, Nr. 319
- [Goddard 2008] GODDARD: A Standardized Lunar Coordinate System for the Lunar Reconnaissance Orbiter and Lunar Datasets - LRO Project and LGCWG White Paper Version 5 / Goddard Space Flight Center Greenbelt, Maryland. URL <https://lunar.gsfc.nasa.gov/library/LunCoordWhitePaper-10-08.pdf>, 2008. – Forschungsbericht. letzter Aufruf 24.11.2016
- [Goldreich 1967] GOLDRICH, P.: Precession of the Moon's Core. In: *Journal of Geophysical Research* 72 (1967), S. 3135–3137
- [Guenther u. a. 1998] GUENTHER, D. B. ; KRAUSS, L. M. ; DEMARQUE, P.: Testing the Constancy of the Gravitational Constant Using Helioseismology. In: *The Astrophysical Journal* 498 (1998), S. 871–876
- [Haase u. a. 2012] HAASE, I. ; OBERST, J. ; SCHOLTEN, F. ; WÄHLISCH, M. ; GLÄSER, P. ; KARACHEVTSEVA, I. ; ROBINSON, M. S.: Mapping the Apollo 17 landing site area based on Lunar Reconnaissance Orbiter Camera images and Apollo surface photography. In: *Journal of Geophysical Research (Planets)* 117 (2012), S. E00H20

- [Heiskanen und Moritz 1967] HEISKANEN, W. A. ; MORITZ, H.: *Physical Geodesy*. Freenam and Co., San Francisco und London, 1967
- [Hobbs u. a. 2010] HOBBS, D. ; HOLL, B. ; LINDEGREN, L. ; RAISON, F. ; KLIONER, S. ; BUTKEVICH, A.: Determining PPN γ with Gaia's astrometric core solution. In: KLIONER, S. A. (Hrsg.) ; SEIDELMANN, P. K. (Hrsg.) ; SOFFEL, M. H. (Hrsg.): *Relativity in Fundamental Astronomy: Dynamics, Reference Frames, and Data Analysis* Bd. 261, 2010, S. 315–319
- [Hofmann u. a. 2010] HOFMANN, F. ; MÜLLER, J. ; BISKUPEK, L.: Lunar laser ranging test of the Nordtvedt parameter and a possible variation in the gravitational constant. In: *Astronomy and Astrophysics* 522 (2010), S. L5+
- [Hofmann u. a. 2013] HOFMANN, F. ; MÜLLER, J. ; BISKUPEK, L. ; MAI, E. ; TORRE, J.M.: Lunar Laser Ranging - What is it Good for? In: *Proceedings of the 18th International Workshop on Laser Ranging*, 2013, S. 13–0402
- [Ilk 1983] ILK, K. H.: *Ein Beitrag zur Dynamik ausgedehnter Körper: Gravitationswechselwirkung.*, Technische Universität München, Dissertation, 1983. – Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, Nr. 288
- [Iorio 2007] IORIO, L.: Constraints on the range λ of Yukawa-like modifications to the Newtonian inverse-square law of gravitation from Solar System planetary motions. In: *Journal of High Energy Physics* 10 (2007), S. 41
- [Iorio 2014a] IORIO, L.: Constraining the Preferred-Frame α_1, α_2 Parameters from Solar System Planetary Precessions. In: *International Journal of Modern Physics D* 23 (2014), S. 1450006–385
- [Iorio 2014b] IORIO, L.: Orbital Motions and the Conservation-Law/Preferred-Frame α_3 Parameter. In: *Galaxies* 2 (2014), S. 482–495
- [Kaspi u. a. 1994] KASPI, V. M. ; TAYLOR, J. H. ; RYBA, M. F.: High-precision timing of millisecond pulsars. 3: Long-term monitoring of PSRs B1855+09 and B1937+21. In: *The Astrophysical Journal* 428 (1994), S. 713–728
- [Klimchitskaya u. a. 2013] KLIMCHITSKAYA, G. L. ; MOHIDEEN, U. ; MOSTEPANENKO, V. M.: Constraints on corrections to Newtonian gravity from two recent measurements of the Casimir interaction between metallic surfaces. In: *Physical Review D* 87 (2013), Nr. 12, S. 125031
- [Koch 2005] KOCH, C.: *Implementierung eines neuen Integrators in die „Lunar Laser Ranging“-Auswertesoftware und Erzeugung von Standardlösungen für die zu bestimmenden Zielparameter*, Universität Hannover, Diplomarbeit, 2005. – unveröffentlicht
- [Konopliv u. a. 2013] KONOPLIV, A. S. ; PARK, R. S. ; YUAN, D.-N. ; ASMAR, S. W. ; WATKINS, M. M. ; WILLIAMS, J. G. ; FAHNESTOCK, E. ; KRUIZINGA, G. ; PAIK, M. ; STREKALOV, D. ; HARVEY, N. ; SMITH, D. E. ; ZUBER, M. T.: The JPL lunar gravity field to spherical harmonic degree 660 from the GRAIL Primary Mission. In: *Journal of Geophysical Research (Planets)* 118 (2013), S. 1415–1434
- [Kopeikin u. a. 2008] KOPEIKIN, S. M. ; PAVLIS, E. ; PAVLIS, D. ; BRUMBERG, V. A. ; ESCAPA, A. ; GETINO, J. ; GUSEV, A. ; MÜLLER, J. ; NI, W.-T. ; PETROVA, N.: Prospects in the orbital and rotational dynamics of the Moon with the advent of sub-centimeter lunar laser ranging. In: *Advances in Space Research* 42 (2008), S. 1378–1390
- [Lambeck 1988] LAMBECK, K.: *Geophysical Geodesy: The Slow Deformations of the Earth*. Clarendon (Oxford University Press), New York, 1988
- [Lambert und Le Poncin-Lafitte 2011] LAMBERT, S. B. ; LE PONCIN-LAFITTE, C.: Improved determination of γ by VLBI. In: *Astronomy and Astrophysics* 529 (2011), S. A70
- [Lense und Thirring 1918] LENSE, J. ; THIRRING, H.: Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie. In: *Physikalische Zeitschrift* 19 (1918). – übersetzt und kommentiert in: Mashhoon u. a. [1984]

- [Li u. a. 2013] LI, Y.-C. ; WU, F.-Q. ; CHEN, X.: Constraints on the Brans-Dicke gravity theory with the Planck data. In: *Physical Review D* 88 (2013), Nr. 8, S. 084053
- [Lieske u. a. 1977] LIESKE, J. H. ; LEDERLE, T. ; FRICKE, W. ; MORANDO, B.: Expressions for the precession quantities based upon the IAU (1976) system of astronomical constants. In: *Astronomy and Astrophysics* 58 (1977), S. 1–16
- [Löcher u. a. 2015] LÖCHER, A. ; HOFMANN, F. ; GLÄSER, P. ; HAASE, I. ; MÜLLER, J. ; KUSCHE, J. ; OBERST, J.: Towards Improved Lunar Reference Frames: LRO Orbit Determination. In: *International Association of Geodesy Symposia*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2015, S. 1–6. – URL http://dx.doi.org/10.1007/1345_2015_146. – letzter Aufruf am 24.11.2016
- [Love 1944] LOVE, A. E. H.: *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. 4. Auflage, Wiederveröffentlichung der Auflage von 1927. Cambridge University Press, New York, Dover, 1944
- [Mai und Müller 2014] MAI, E. ; MÜLLER, J.: Work on a New Solar - System Ephemeris: Status Report. In: *EGU General Assembly Conference Abstracts* Bd. 16, URL http://presentations.copernicus.org/EGU2014-4109_presentation.pdf, 2014, S. 4109. – letzter Aufruf am 24.11.2016
- [Manche 2011] MANCHE, H.: *Élaboration de l'éphéméride INPOP : modèle dynamique et ajustements aux données de télémétrie laser Lune*, Observatoire de Paris, Dissertation, 2011
- [Marini und Murray 1973] MARINI, J. W. ; MURRAY, Jr.: Correction of laser range tracking data for atmospheric refraction at elevations above 10 degrees / NASA Goddard Space Flight Center. 1973 (NASA-TM-X-70555). – Forschungsbericht
- [Mashhoon u. a. 1984] MASHHOON, B. ; HEHL, F. W. ; THEISS, D. S.: On the Influence of the Proper Rotation of Central Bodies on the Motions of Planets and Moons According to Einstein's Theory of Gravitation. In: *General Relativity and Gravitation* 16 (1984)
- [Mathews u. a. 2002] MATHEWS, P. M. ; HERRING, T. A. ; BUFFETT, B. A.: Modeling of nutation and precession: New nutation series for nonrigid Earth and insights into the Earth's interior. In: *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 107 (2002), S. 2068
- [Mayet u. a. 2016] MAYET, F. ; GREEN, A. M. ; BATTAT, J. B. R. ; BILLARD, J. ; BOZORGNIA, N. ; GELMINI, G. B. ; GONDOLO, P. ; KAVANAGH, B. J. ; LEE, S. K. ; LOOMBA, D. ; MONROE, J. ; MORGAN, B. ; O'HARE, C. A. J. ; PETER, A. H. G. ; PHAN, N. S. ; VAHSEN, S. E.: A review of the discovery reach of directional Dark Matter detection. In: *Physics Reports* 627 (2016), S. 1–49
- [McCarthy und Seidelmann 2009] MCCARTHY, D. D. ; SEIDELMANN, P. K.: *Time: From Earth Rotation to Atomic Physics*. Wiley-VCH, Weinheim, 2009
- [Mendes und Pavlis 2004] MENDES, V. B. ; PAVLIS, E. C.: High-accuracy zenith delay prediction at optical wavelengths. In: *Geophysical Research Letters* 31 (2004), S. L14602
- [Mendes u. a. 2002] MENDES, V. B. ; PRATES, G. ; PAVLIS, E. C. ; PAVLIS, D. E. ; LANGLEY, R. B.: Improved mapping functions for atmospheric refraction correction in SLR. In: *Geophysical Research Letters* 29 (2002), Nr. 10, S. 1414
- [Michelsen 2010] MICHELSEN, E. L.: *Normal point generation and first photon bias correction in APOLLO lunar laser ranging*, University of California, San Diego, Dissertation, 2010
- [Misner u. a. 1973] MISNER, C. W. ; THORNE, K. S. ; WHEELER, J. A.: *Gravitation*. W.H. Freeman and Co., San Francisco, 1973
- [Montenbruck und Gill 2000] MONTENBRUCK, O. ; GILL, E.: *Satellite orbits. Model, methods and applications*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2000
- [Moyer 1971] MOYER, T. D.: *Mathematical formulation of the Double-Precision Orbit Determination Program (DPODP)*. NASA, Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California, USA, 1971. – URL <http://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19710017134>. – letzter Aufruf am 24.11.2016

- [Müller 1991] MÜLLER, J.: *Analyse von Lasermessungen zum Mond im Rahmen einer post-Newton'schen Theorie*, Technische Universität München, Dissertation, 1991. – Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, Nr. 383
- [Müller und Biskupek 2007] MÜLLER, J. ; BISKUPEK, L.: Variations of the gravitational constant from lunar laser ranging data. In: *Classical and Quantum Gravity* 24 (2007), S. 4533–4538
- [Müller u. a. 2014] MÜLLER, J. ; BISKUPEK, L. ; HOFMANN, F. ; MAI, E.: *Frontiers in Relativistic Celestial Mechanics - Volume 2: Applications and Experiments*. Kap. Lunar Laser Ranging and Relativity, S. 103–156, de Gruyter, Berlin, Boston, 2014
- [Müller u. a. 2012] MÜLLER, J. ; HOFMANN, F. ; BISKUPEK, L.: Testing various facets of the equivalence principle using lunar laser ranging. In: *Classical and Quantum Gravity* 29 (2012), Nr. 18, S. 184006
- [Müller und Nordtvedt 1998] MÜLLER, J. ; NORDTVEDT, K.: Lunar laser ranging and the equivalence principle signal. In: *Physical Review D* 58 (1998), Nr. 6, S. 062001
- [Müller u. a. 1996] MÜLLER, J. ; NORDTVEDT, K. ; VOKROUHLICKÝ, D.: Improved constraint on the α_1 PPN parameter from lunar motion. In: *Physical Review D* 54 (1996), S. 5927
- [Murphy 2013] MURPHY, T. W.: Lunar laser ranging: the millimeter challenge. In: *Reports on Progress in Physics* 76 (2013), Nr. 7, S. 076901
- [Murphy 2016] MURPHY, T. W.: *Datenarchiv der APOLLO-Station*. 2016. – URL http://physics.ucsd.edu/~tmurphy/apollo/norm_pts.html. – letzter Aufruf am 24.11.2016
- [Murphy u. a. 2008] MURPHY, T. W. ; ADELBERGER, E. G. ; BATTAT, J. B. R. ; CAREY, L. N. ; HOYLE, C. D. ; LEBLANC, P. ; MICHELSEN, E. L. ; NORDTVEDT, K. ; ORIN, A. E. ; STRASBURG, J. D. ; STUBBS, C. W. ; SWANSON, H. E. ; WILLIAMS, E.: The Apache Point Observatory Lunar Laser-ranging Operation: Instrument Description and First Detections. In: *Publications of the Astronomical Society of Pacific* 120 (2008), S. 20–37
- [Murphy u. a. 2011] MURPHY, T. W. ; ADELBERGER, E. G. ; BATTAT, J. B. R. ; HOYLE, C. D. ; JOHNSON, N. H. ; MCMILLAN, R. J. ; MICHELSEN, E. L. ; STUBBS, C. W. ; SWANSON, H. E.: Laser ranging to the lost Lunokhod 1 reflector. In: *Icarus* 211 (2011), S. 1103–1108
- [Murphy u. a. 2010] MURPHY, T. W. ; ADELBERGER, E. G. ; BATTAT, J. B. R. ; HOYLE, C. D. ; MCMILLAN, R. J. ; MICHELSEN, E. L. ; SAMAD, R. L. ; STUBBS, C. W. ; SWANSON, H. E.: Long-term degradation of optical devices on the Moon. In: *Icarus* 208 (2010), S. 31–35
- [Murphy u. a. 2014] MURPHY, T. W. ; MCMILLAN, R. J. ; JOHNSON, N. H. ; GOODROW, S. D.: Lunar eclipse observations reveal anomalous thermal performance of Apollo reflectors. In: *Icarus* 231 (2014), S. 183–192
- [NASA 2016] NASA: *NASA Image and Video Library*. 2016. – URL <https://images.nasa.gov>. – letzter Aufruf am 24.11.2016
- [Nerem u. a. 1993] NEREM, R. S. ; CHAO, B. F. ; AU, A. Y. ; CHAN, J. C. ; KLOSKO, S. M. ; PAVLIS, N. K. ; WILLIAMSON, R. G.: Temporal variations of the earth's gravitational field from satellite laser ranging to LAGEOS. In: *Geophysical Research Letters* 20 (1993), S. 595–598
- [Nesseris und Perivolaropoulos 2007] NESSERIS, S. ; PERIVOLAROPOULOS, L.: Limits of extended quintessence. In: *Physical Review D* 75 (2007), Nr. 2, S. 023517
- [Newhall u. a. 1983] NEWHALL, X. X. ; STANDISH, E. M. ; WILLIAMS, J. G.: DE 102 - A numerically integrated ephemeris of the moon and planets spanning forty-four centuries. In: *Astronomy and Astrophysics* 125 (1983), S. 150–167
- [Newhall und Williams 1997] NEWHALL, X. X. ; WILLIAMS, J. G.: Estimation of the lunar physical librations. In: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 66 (1997), S. 21–30

- [Niemeier 2002] NIEMEIER, W.: *Ausgleichsrechnung*. de Gruyter, 2002
- [Nobili 2016] NOBILI, A. M.: Do general relativistic effects limit experiments to test the universality of free fall and the weak equivalence principle? In: *ArXiv e-prints, Nr. 1608.03104* (2016)
- [Nobili u. a. 2012] NOBILI, A. M. ; SHAO, M. ; PEGNA, R. ; ZAVATTINI, G. ; TURYSHEV, S. G. ; LUCCHESI, D. M. ; DE MICHELE, A. ; DORAVARI, S. ; COMANDI, G. L. ; SARAVANAN, T. R. ; PALMONARI, F. ; CATASTINI, G. ; ANSELMINI, A.: 'Galileo Galilei' (GG): space test of the weak equivalence principle to 10^{-17} and laboratory demonstrations. In: *Classical and Quantum Gravity* 29 (2012), Nr. 18, S. 184011
- [Noerdlinger 2008] NOERDLINGER, P. D.: Solar Mass Loss, the Astronomical Unit, and the Scale of the Solar System. In: *ArXiv e-prints, Nr. 0801.3807* (2008)
- [Nordtvedt 1968a] NORDTVEDT, K.: Equivalence Principle for Massive Bodies. I. Phenomenology. In: *Physical Review* 169 (1968), S. 1014–1016
- [Nordtvedt 1968b] NORDTVEDT, K.: Equivalence Principle for Massive Bodies. II. Theory. In: *Physical Review* 169 (1968), S. 1017–1025
- [Nordtvedt 1987] NORDTVEDT, K.: Probing gravity to the second post-Newtonian order and to one part in 10^7 using the spin axis of the sun. In: *The Astrophysical Journal* 320 (1987), S. 871–874
- [Nordtvedt 1994] NORDTVEDT, K.: Cosmic acceleration of Earth and the Moon by dark matter. In: *The Astrophysical Journal* 437 (1994), S. 529–531
- [Nordtvedt 1998] NORDTVEDT, K.: Optimizing the observation schedule for tests of gravity in lunar laser ranging and similar experiments. In: *Classical and Quantum Gravity* 15 (1998), S. 3363–3381
- [Nordtvedt 2003] NORDTVEDT, K.: Lunar Laser Ranging - a comprehensive probe of post-Newtonian gravity. In: *ArXiv e-prints, Nr. gr-qc/0301024* (2003)
- [Nordtvedt u. a. 1995] NORDTVEDT, K. ; MÜLLER, J. ; SOFFEL, M.: Cosmic acceleration of the Earth and Moon by dark matter. In: *Astronomy and Astrophysics* 293 (1995), S. L73–L74
- [Nordtvedt und Vokrouhlicky 1997] NORDTVEDT, K. ; VOKROUHICKY, D.: Recent Progress in Analytical Modeling of Relativistic Effects in the Lunar Motion. In: WYTRZYSZCZAK, I. M. (Hrsg.) ; LIESKE, J. H. (Hrsg.) ; FELDMAN, R. A. (Hrsg.): *IAU Colloquium. 165: Dynamics and Astrometry of Natural and Artificial Celestial Bodies*, 1997, S. 205
- [Pato und Iocco 2015] PATO, M. ; IOCCO, F.: The Dark Matter Profile of the Milky Way: A Non-parametric Reconstruction. In: *The Astrophysical Journal Letters* 803 (2015), S. L3
- [Pavlis u. a. 2008] PAVLIS, N. K. ; HOLMES, S. A. ; KENYON, S. C. ; FACTOR, J. K.: *An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008*. presented at the 2008 General Assembly of the European Geosciences Union, Vienna, Austria. 2008. – URL http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/NPavlis&al_EGU2008.ppt. – letzter Aufruf am 24.11.2016
- [Pavlis u. a. 2012] PAVLIS, N. K. ; HOLMES, S. A. ; KENYON, S. C. ; FACTOR, J. K.: The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008). In: *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)* 117 (2012), S. B04406
- [Pavlov u. a. 2016] PAVLOV, D. A. ; WILLIAMS, J. G. ; SUVORKIN, V. V.: Determining parameters of Moon's orbital and rotational motion from LLR observations using GRAIL and IERS-recommended models. In: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* (2016)
- [Pereira u. a. 2016] PEREIRA, J. P. ; OVERDUIN, J. M. ; POYNEER, A. J.: Satellite Test of the Equivalence Principle as a Probe of Modified Newtonian Dynamics. In: *Physical Review Letters* 117 (2016), Nr. 7, S. 071103
- [Petit und Luzum 2010] PETIT, G. (Hrsg.) ; LUZUM, B. (Hrsg.): *IERS Conventions (2010)*. Bd. IERS Technical Note 36. Verlag des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, 2010

- [Pitjeva und Pitjev 2013] PITJEVA, E. V. ; PITJEV, N. P.: Relativistic effects and dark matter in the Solar system from observations of planets and spacecraft. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 432 (2013), S. 3431–3437
- [Pitjeva und Pitjev 2014] PITJEVA, E. V. ; PITJEV, N. P.: Development of planetary ephemerides EPM and their applications. In: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 119 (2014), S. 237–256
- [Porter u. a. 2011] PORTER, T. A. ; JOHNSON, R. P. ; GRAHAM, P. W.: Dark Matter Searches with Astroparticle Data. In: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 49 (2011), S. 155–194
- [Reichhoff 1999] REICHHOFF, B.: *Verfeinerung und objektorientierte Implementierung eines Modells zur Nutzung von Lasermessungen zum Mond*, Technische Universität München, Dissertation, 1999. – Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, Nr. 512
- [Riazuelo und Uzan 2002] RIAZUELO, A. ; UZAN, J.-P.: Cosmological observations in scalar-tensor quintessence. In: *Physical Review D* 66 (2002), Nr. 2, S. 023525
- [Ricklefs und Moore 2009] RICKLEFS, R. L. ; MOORE, C. J.: Consolidated Laser Ranging Data Format (CRD) / ILRS Data Formats and Procedures Working Group. URL http://ilrs.gsfc.nasa.gov/docs/crd_v1.01.pdf, 2009. – Forschungsbericht. letzter Aufruf am 24.11.2016
- [Roll u. a. 1964] ROLL, P. G. ; KROTKOV, R. ; DICKE, R.H.: The equivalence of inertial and passive gravitational mass. In: *Annals of Physics* 26 (1964), Nr. 3, S. 442 – 517
- [Rothman und Matzner 1982] ROTHMAN, T. ; MATZNER, R.: Scale-Covariant Gravitation and Primordial Nucleosynthesis. In: *The Astrophysical Journal* 257 (1982), S. 450
- [Roy und Peltier 2011] ROY, K. ; PELTIER, W. R.: GRACE era secular trends in Earth rotation parameters: A global scale impact of the global warming process? In: *Geophysical Research Letters* 38 (2011), S. 10306
- [Rudenko u. a. 2014] RUDENKO, S. ; DETTMERING, D. ; ESSELBORN, S. ; SCHÖNE, T. ; FÖRSTE, C. ; LEMOINE, J.-M. ; ABLAIN, M. ; ALEXANDRE, D. ; NEUMAYER, K.-H.: Influence of time variable geopotential models on precise orbits of altimetry satellites, global and regional mean sea level trends. In: *Advances in Space Research* 54 (2014), S. 92–118
- [Sanders u. a. 2010] SANDERS, A. J. ; GILLIES, G. T. ; SCHMUTZER, E.: Implications upon theory discrimination of an accurate measurement of the time rate of change of the gravitational “constant” G and other cosmological parameters. In: *Annalen der Physik* 522 (2010), S. 861–873
- [Schastok 1987] SCHASTOK, J.: *Drei Studien zur Dynamik des Erde-Mond-Systems*, Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen, Dissertation, 1987
- [Schmutzer 2009] SCHMUTZER, E.: Improved Cosmological Parameters and Treatment of the 5-DIMENSIONAL Klein-Gordon Field and Dirac-Field on the Basis of the Projective Unified Field Theory. In: *International Journal of Modern Physics E* 18 (2009), S. 1903–1916
- [Schneider 1990] SCHNEIDER, M. (Hrsg.): *Satellitengeodäsie. Ergebnisse aus dem gleichnamigen Sonderforschungsbereich der Technischen Universität München*. VCH, Weinheim, 1990
- [Schneider 1992] SCHNEIDER, M.: *Himmelsmechanik. Band I: Grundlagen, Determinierung*. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1992
- [Seitz u. a. 2012] SEITZ, M. ; ANGERMANN, D. ; BLOSSFELD, M. ; DREWES, H. ; GERSTL, M.: The 2008 DGFI realization of the ITRS: DTRF2008. In: *Journal of Geodesy* 86 (2012), S. 1097–1123
- [Selig u. a. 2013] SELIG, H. ; LÄMMERZAHN, C. ; NI, W.-T.: Astrodynamical Space Test of Relativity Using Optical Devices i (astrod i) - Mission Overview. In: *International Journal of Modern Physics D* 22 (2013), S. 1341003
- [Shao u. a. 2013] SHAO, L. ; CABALLERO, R. N. ; KRAMER, M. ; WEX, N. ; CHAMPION, D. J. ; JESSNER, A.: A new limit on local Lorentz invariance violation of gravity from solitary pulsars. In: *Classical and Quantum Gravity* 30 (2013), Nr. 16, S. 165019

- [Shao und Wex 2012] SHAO, L. ; WEX, N.: New tests of local Lorentz invariance of gravity with small-eccentricity binary pulsars. In: *Classical and Quantum Gravity* 29 (2012), Nr. 21
- [Shapiro 1964] SHAPIRO, I. I.: Fourth Test of General Relativity. In: *Physical Review Letters* 13 (1964), S. 789–791
- [Shapiro u. a. 1988] SHAPIRO, I. I. ; REASENBERG, R. D. ; CHANDLER, J. F. ; BABCOCK, R. W.: Measurement of the de Sitter precession of the Moon: A relativistic three-body effect. In: *Physical Review Letters* 61 (1988), Nr. 23, S. 2643–2646
- [Soffel u. a. 2008] SOFFEL, M. ; KLIONER, S. ; MÜLLER, J. ; BISKUPEK, L.: Gravitomagnetism and lunar laser ranging. In: *Physical Review D* 78 (2008), Nr. 2, S. 024033
- [Sovers und Fanselow 1987] SOVERS, O. J. ; FANSELOW, J. L.: Observation model and parameter partials for the JPL VLBI parameter estimation software MASTERFIT-1987. In: *NASA STI/Recon Technical Report N 88* (1987)
- [Stairs u. a. 2005] STAIRS, I. H. ; FAULKNER, A. J. ; LYNE, A. G. ; KRAMER, M. ; LORIMER, D. R. ; MCLAUGHLIN, M. A. ; MANCHESTER, R. N. ; HOBBS, G. B. ; CAMILO, F. ; POSSENTI, A. ; BURGAY, M. ; D'AMICO, N. ; FREIRE, P. C. ; GREGORY, P. C.: Discovery of Three Wide-Orbit Binary Pulsars: Implications for Binary Evolution and Equivalence Principles. In: *The Astrophysical Journal* 632 (2005), S. 1060–1068
- [Standish und Williams 2012] STANDISH, E. M. ; WILLIAMS, J. G.: Orbital Ephemerides of the Sun, Moon, and Planets. In: SEIDELMANN, P. K. (Hrsg.): *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*. U. S. Naval Observatory, Washington, D. C., 2012, Kap. 8. – URL <ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/ioms/ExplSupplChap8.pdf>. – letzter Aufruf am 24.11.2016
- [Steinhardt und Wesley 2010] STEINHARDT, P. J. ; WESLEY, D.: Exploring extra dimensions through observational tests of dark energy and varying Newton's constant. In: *arXiv e-prints*, Nr. 1003.2815 (2010)
- [Teller 1948] TELLER, E.: On the Change of Physical Constants. In: *Physical Review* 73 (1948), S. 801–802
- [Thorsett 1996] THORSETT, S. E.: The Gravitational Constant, the Chandrasekhar Limit, and Neutron Star Masses. In: *Physical Review Letters* 77 (1996), S. 1432–1435
- [Torge 2001] TORGE, W.: *Geodesy*. 3rd Edition. de Gruyter, Berlin, New York, 2001
- [Torge und Müller 2012] TORGE, W. ; MÜLLER, J.: *Geodesy*. 4th Edition. de Gruyter, Berlin, Boston, 2012
- [Uzan 2003] UZAN, J.-P.: The fundamental constants and their variation: observational and theoretical status. In: *Reviews of Modern Physics* 75 (2003), S. 403–455
- [Viswanathan u. a. 2015] VISWANATHAN, V. ; FIENGA, A. ; LASKAR, J. ; MANCHE, H. ; TORRE, J.-M. ; COURDE, C. ; EXERTIER, P.: Utilizing the Lunar Laser Ranging datasets alongside the radioscience data from the Lunar Reconnaissance Orbiter to improve the dynamical model of the Moon. In: *IAU General Assembly 22* (2015), S. 2228567
- [Vokrouhlicky 1997] VOKROUHLICKY, D.: A Note on the Solar Radiation Perturbations of Lunar Motion. In: *Icarus* 126 (1997), S. 293–300
- [Wagner u. a. 2012] WAGNER, T. A. ; SCHLAMMINGER, S. ; GUNDLACH, J. H. ; ADELBERGER, E. G.: Torsion-balance tests of the weak equivalence principle. In: *Classical and Quantum Gravity* 29 (2012), Nr. 18, S. 184002
- [Weber u. a. 2011] WEBER, R. C. ; LIN, P.-Y. ; GARNERO, E. J. ; WILLIAMS, Q. ; LOGNONNÉ, P.: Seismic Detection of the Lunar Core. In: *Science* 331 (2011), S. 309

- [Wieczorek u. a. 2006] WIECZOREK, M. A. ; JOLLIFF, B. L. ; KHAN, A. ; PRITCHARD, M. E. ; WEISS, B. P. ; WILLIAMS, J. G. ; HOOD, L. L. ; RIGHTER, K. ; NEAL, C. R. ; SHEARER, C. K. ; MCCALLUM, I. S. ; TOMPKINS, S. ; HAWKE, B. R. ; PETERSON, C. ; GILLIS, J. J. ; BUSSEY, B.: The Constitution and Structure of the Lunar Interior. In: *Reviews in Mineralogy and Geochemistry* 60 (2006), S. 221–364
- [Will 1993] WILL, C. M.: *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1993
- [Will 2014] WILL, C. M.: The Confrontation between General Relativity and Experiment. In: *Living Reviews in Relativity* 17 (2014), Nr. 4. – URL <http://www.livingreviews.org/lrr-2014-4>. – letzter Aufruf 24.11.2016
- [Will und Nordtvedt 1972] WILL, C. M. ; NORDTVEDT, K.: Conservation Laws and Preferred Frames in Relativistic Gravity. I. Preferred-Frame Theories and an Extended PPN Formalism. In: *The Astrophysical Journal* 177 (1972), S. 757
- [Williams 1994] WILLIAMS, J. G.: Contributions to the Earth's obliquity rate, precession, and nutation. In: *The Astronomical Journal* 108 (1994), S. 711–724
- [Williams und Boggs 2015] WILLIAMS, J. G. ; BOGGS, D. H.: Tides on the Moon: Theory and determination of dissipation. In: *Journal of Geophysical Research (Planets)* 120 (2015), S. 689–724
- [Williams und Boggs 2016] WILLIAMS, J. G. ; BOGGS, D. H.: Secular tidal changes in lunar orbit and Earth rotation. In: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 126 (2016), S. 89–129
- [Williams u. a. 2008] WILLIAMS, J. G. ; BOGGS, D. H. ; FOLKNER, W. M.: DE421 Lunar Orbit, Physical Librations and Surface Coordinates / Jet Propulsion Laboratory. 2008 (IOM 335-JW,DB,WF-20080314-001). – Forschungsbericht
- [Williams u. a. 2013] WILLIAMS, J. G. ; BOGGS, D. H. ; FOLKNER, W. M.: DE430 Lunar Orbit, Physical Librations and Surface Coordinates / Jet Propulsion Laboratory. 2013 (IOM 335-JW,DB,WF-20130722-016). – Forschungsbericht
- [Williams u. a. 2001] WILLIAMS, J. G. ; BOGGS, D. H. ; YODER, C. F. ; RATCLIFF, J. T. ; DICKEY, J. O.: Lunar rotational dissipation in solid body and molten core. In: *Journal of Geophysical Research (Planets)* 106 (2001), S. 27933–27968
- [Williams und Folkner 2009] WILLIAMS, J. G. ; FOLKNER, W. M.: Lunar Laser Ranging: Relativistic Model and Tests of Gravitational Physics. In: *IAU Symposium 261, Bulletin of the American Astronomical Society* 41 (2009)
- [Williams u. a. 2014] WILLIAMS, J. G. ; KONOPLIV, A. S. ; BOGGS, D. H. ; PARK, R. S. ; YUAN, D.-N. ; LEMOINE, F. G. ; GOOSSENS, S. ; MAZARICO, E. ; NIMMO, F. ; WEBER, R. C. ; ASMAR, S. W. ; MELOSH, H. J. ; NEUMANN, G. A. ; PHILLIPS, R. J. ; SMITH, D. E. ; SOLOMON, S. C. ; WATKINS, M. M. ; WIECZOREK, M. A. ; ANDREWS-HANNA, J. C. ; HEAD, J. W. ; KIEFER, W. S. ; MATSUYAMA, I. ; MCGOVERN, P. J. ; TAYLOR, G. J. ; ZUBER, M. T.: Lunar interior properties from the GRAIL mission. In: *Journal of Geophysical Research (Planets)* 119 (2014), Nr. 7, S. 1546–1578. – ISSN 2169-9100
- [Williams u. a. 1996a] WILLIAMS, J. G. ; NEWHALL, X. X. ; DICKEY, J. O.: Lunar moments, tides, orientation and coordinate frames. In: *Planetary and Space Science* 44 (1996), S. 1077–1080
- [Williams u. a. 1996b] WILLIAMS, J. G. ; NEWHALL, X. X. ; DICKEY, J. O.: Relativity parameters determined from lunar laser ranging. In: *Physical Review D* 53 (1996), S. 6730–6739
- [Williams u. a. 2009] WILLIAMS, J. G. ; TURYSHEV, S. G. ; BOGGS, D. H.: Lunar Laser Ranging Tests of the Equivalence Principle with the Earth and Moon. In: *International Journal of Modern Physics D* 18 (2009), S. 1129–1175
- [Williams u. a. 2012] WILLIAMS, J. G. ; TURYSHEV, S. G. ; BOGGS, D. H.: Lunar laser ranging tests of the equivalence principle. In: *Classical and Quantum Gravity* 29 (2012), Nr. 18, S. 184004

- [Yagudina und Vasiliev 2014] YAGUDINA, E. ; VASILIEV, M.: EPM-ERA 2013 - The new version of lunar ephemeris developed in IAA RAS. In: CAPITAINE, N. (Hrsg.): *Journées 2013 "Systèmes de référence spatio-temporels"*, 2014, S. 255–258
- [Yoder 1981] YODER, C. F.: The free librations of a dissipative moon. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A* 303 (1981), S. 327–338
- [Yoder 1995] YODER, C. F.: Venus' free obliquity. In: *Icarus* 117 (1995), S. 250–286
- [Zerhouni und Capitaine 2009] ZERHOUNI, W. ; CAPITAINE, N.: Celestial pole offsets from lunar laser ranging and comparison with VLBI. In: *Astronomy and Astrophysics* 507 (2009), S. 1687–1695